

В помощь
школьнику



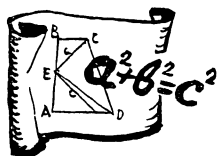
И. ДЕПМАН

РАССКАЗЫ О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

В помощь школьнику

И. Я. ДЕПМАН

РАССКАЗЫ О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ



*Рисунки
Ю. Смольникова*

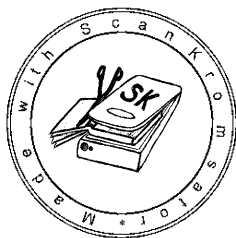
Государственное Издательство
Детской Литературы Министерства Просвещения РСФСР
Ленинград 1957

ДОРОГИЕ ЧИТАТЕЛИ!

Присылайте нам ваши отзывы о прочитанных вами книгах и пожелания об их содержании и оформлении.

Укажите свой точный адрес и возраст.

Пишите по адресу: Ленинград, наб. Кутузова, 6. Дом детской книги Детгиза.



Scan AAW

ДЛЯ СРЕДНЕГО И СТАРШЕГО ВОЗРАСТА

Депман Иван Яковлевич

„РАССКАЗЫ О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ“

Ответственный редактор *Л. А. Джалалбекова.*

Художник-редактор *Н. Д. Полозов*

Технический редактор *Л. Б. Леонтьева.* Корректоры *П. Л. Трусова* и *М. М. Юдина.* Подписано к набору 26/X 1956 г. Подписано к печати 18/I 1957 г. Формат $84 \times 108 \frac{1}{32}$. Печ. л. 8. Усл. п. л. 6,56. Уч.-изд. л. 5,18. Тираж 100 000 экз. М-14014. Ленинградское отделение Детгиза. Ленинград, наб. Кутузова, 6. Заказ № 486. 2-я фабрика детской книги Детгиза Министерства просвещения РСФСР. Ленинград, 2-я Советская, 7. Цена 2 р. 55 к.

ВВЕДЕНИЕ

Каждый школьник мечтает о том, чтобы хорошо решать задачи. Это правильное желание. Умение решать задачи показывает, что теория усвоена прочно и сознательно, а это и является требованием школы к каждому учащемуся.

Читатель не должен ожидать, что наша маленькая книга научит его решать всякие задачи, которые будут встречаться в курсе арифметики и начальных разделах геометрии и алгебры, изучаемых в V—VII классах. Умение решать разные задачи требует продолжительной практики и часто такого остроумия, которому нельзя научить. „Остроумие есть цветок, который произрастает не на всякой почве и распускается так, что никто не знает как“, — говорит известный автор книги о насекомых, Фабр, очень высоко ценивший математику и применявший ее в своих описаниях жизни насекомых. Очень часто простые на первый взгляд вопросы требуют при решении большого остроумия. В этом отношении замечательнейшие примеры представляет арифметика целых чисел, которая изучается в IV—V классах школы.

В арифметике целых чисел известны кажущиеся очевидными положения, для которых наука до сих пор не имеет доказательств, хотя этих доказательств искали крупнейшие ученые в течение ряда столетий. Величайшие русские математики Пафнутий Львович Чебышев (1821—1894) и Иван Матвеевич Виноградов



П. Л. Чебышев

(родился в 1891 году) приобрели мировую славу решением вопросов арифметики целых чисел.

„Уселся он с похвальной целью
Себе присвоить ум чужой“, —

говорит Пушкин об Евгении Онегине, засевшем за чтение.

Читатель нашей книги должен не только запомнить данные решения. Надо пытаться каждую задачу решить самостоятельно, а если это не удастся, то читать данное в книге объяснение, чтобы применить усвоенный ход рассуждения к решению других задач. Усвоив решение задачи по книге, попытайтесь найти и свой способ решения. Он будет для вас всегда самым понятным, а иногда может оказаться и новым, до этого неизвестным в науке. Старое правило говорит: *научить* кого-либо решать всякие задачи нельзя, но *научиться* решать их можно. Для этого нужны настойчивость в самостоятельном преодолении кажущихся трудностей и трудолюбие.

Поучительно послушать рассказ старого писателя Н. Н. Златовратского о том, как он стал понимать математику, которая ему вначале плохо давалась. Отец Златовратского, получая от школьного начальства все время сообщения о том, что сын его не успевает в математике, просил известного своею строгостью учителя математики другой школы города заняться с мальчиком. Вот что о последующем рассказывает Златовратский:

„Принял С. [учитель, к которому направлен был мальчик] меня хотя и с обычною суровостью, но „по-семейному“, и, нисколько не интересуясь, знаю ли я что-нибудь по его предмету и как, он без всяких предисловий приступил к ознакомлению меня с самыми элементарными основами математики, как будто я никогда не



И. М. Виноградов

учился в гимназии и не сидел в ней уже четыре года. Протестовать я, конечно, не решался. Он прямо начал объяснять мне совершенно просто, „по-человечески“, именно *по-человечески*, нумерацию и затем шаг за шагом все те необыкновенно просто и логически вытекающие одно из другого действия, которые мне казались раньше чуть ли не кабалистикой (загадочным, волшебным)... Урок, другой, третий, и я каждый раз стал уходить от него как будто всё более и более духовно окрыленным. Прошло два месяца, и я уже был осиян настоящим откровением. Господи! да неужели же я не идиот, не тупица, как уже начинали говорить обо мне мудрые гимназические педагоги?... С. был, по-видимому, мною тоже доволен, но он не показывал и вида, он даже не интересовался тем, за что и почему я получал в гимназии двойки и единицы; у него я уже свободно решал довольно сложные задачи по арифметике и геометрии... По прошествии двух месяцев С. сказал отцу лаконично: „Будет, довольно... Больше сыну ко мне ходить незачем пока... Пусть готовится к экзамену...“ Экзамен я выдержал, получив по математике „удовлетворительно“, к изумлению нашего педагога, не решавшегося мне еще поставить лучший балл“.¹

Златовратский сообщает, что в дальнейшем, как в средней, так и в высшей школе, он считался „математиком“.

Попробуем и мы излагать математические сведения в виде рассказов, не стремясь подражать принятому в учебниках математики способу.

Автор книги с благодарностью вспоминает одного из своих учителей — лаборанта Петербургского университета Владимира Владимировича *Лермантова* (1845—1918), близкого родственника великого поэта. Этот замечательный педагог, написавший интересные книги — „Курс применимой алгебры“ и „Применимая



В.В. Лермантов

¹ Н. Н. Златовратский, Воспоминания, 1956, стр. 71.

геометрия, основанная на опыте“, — все время напоминал нам, своим ученикам, что надо думать, „сначала думать, а потом делать“.

Стремясь прививать читателям привычку думать, автор книги подобрал такие задачи, для решения которых требуется лишь немного подумать.

Не надо смущаться тем, что не все читаемое сразу ясно и понятно. Головы людей работают различно. Одни схватывают новое легко и сразу, но при этом часто поверхностно, другие усваивают новое медленно, но глубоко.

Про величайшего математика XX века Давида Гильберта (1862—1943) рассказывают, что он усваивал новые идеи очень медленно, зато когда он их усвоил, то никто не мог сравниться с ним в использовании и дальнейшем развитии этих идей.

Чтение математической книги, в том числе и нашей, не просто забава. Такую книгу надо читать с карандашом в руке, повторяя излагаемые выкладки. Более длинное рассуждение обычно не усваивается

с одного чтения. Особенность математики заключается в том, что каждое новое предложение опирается на предыдущие. При чтении нового материала не все новые понятия сразу усваиваются и запоминаются. Это затрудняет понимание дальнейшего. Приходится возвращаться к предыдущему и так иногда по нескольку раз. Если это с вами произойдет, то не спешите, как вначале склонен был делать писатель Златовратский, зачислять себя в тупицы, а упорно продолжайте „грызть гранит науки“.

Понимание придет. „Не всё дано всем“, — сказал большой математик и просветитель XVIII века Даламбер. Но „терпение и труд всё перетрут“.



Д. Гильберт

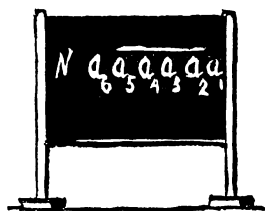
РАССКАЗ ПЕРВЫЙ

*о том, что происходило в одной из ленинградских школ
на уроке в сентябре 1956 года при решении задачи*

Найти шестизначное число:

$$N = \overline{a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1},$$

которое при умножении его на 2, 3, 4, 5, 6 дает также шестизначные числа, написанные теми же цифрами, только в другом порядке.



Примечание. Символом $\overline{a_6 a_5}$

$a_4 a_3 a_2 a_1$ принято обозначать число, у которого на первом месте справа стоит цифра a_1 , на втором месте цифра a_2 , на третьем месте цифра a_3 и так далее. Иными словами, в этом числе a_1 единиц, a_2 десятков, a_3 сотен, a_4 тысяч, a_5 десятков тысяч, a_6 сотен тысяч. Символы $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ являются цифрами, обозначающими число единиц в отдельных разрядах: в разряде единиц, десятков, сотен, тысяч и так далее. У греков был для обозначения этих чисел единиц отдельных разрядов особый термин: они назывались *пифменами*. Грек читал бы нашу задачу так: пифменами искомого числа являются, начиная справа, $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$.

Здесь мы имеем пример того, как наличие соответственного термина упрощает изложение и облегчает его.

Раньше чем продолжать чтение, попытайтесь самостоятельно найти решение задачи.

В дальнейшем приводится беседа, проведенная автором книги с учениками, только что перешедшими в VIII класс.

Учитель. Скажите, сколько вы за годы учения в школе решили задач?

Ученик (после некоторого молчания). Не считали... вообще много.

Учитель. Много? Тысяча будет?

Ученик. Возможно, что будет.

Учитель. Как вы думаете, зачем вас заставляют столько задач решать?

Ученик (после некоторого раздумья). Чтобы закрепить теорию.

Учитель. А зачем заставляют изучать теорию?

Ученик. Чтобы решать задачи.

Учитель. Итак, теория для решения задач, задачи для закрепления теории.

(Смех в классе.)

Не похоже ли это на рассказ о том, что где-то в океане существует остров, жители которого занимаются только тем, что стирают друг другу белье.

(Смех.)

Ученик. Математика нужна на практике, нужно уметь решать задачи, которые возникают в производстве, которые ставит физика, химия.

Учитель. Это сказано правильно и хорошо. Только как вы представляете использование математики на практике? Так ли, что решили в школе все возможные задачи, записали в тетрадь, перенумеровали, и когда нужно решить какую-нибудь практическую задачу, то вспоминаете, под каким номером эта задача у вас записана, раскрываете тетрадь и смотрите, как она решается? Так ли происходит использование умения решать задачи на практике?



Ученик. Нет, так нельзя поступать. Всех задач не перерешить, да их так много, что не запомнишь и не найдешь.

Учитель. Верно, на практике встречается столько различных задач, что в школе всех их перерешить нельзя.

Вас заставляют в школе решать задачи для того, чтобы вы научились вообще решать задачи.

Что же для этого нужно, чтобы решать задачи?

Ученик. Надо знать теорию, приемы решения разного типа задач.

Учитель. Верно. Но можно ли предусмотреть все типы задач и запомнить приемы их решения?

Ученик. Главные приемы можно... например, решение уравнений.

Учитель. Верно. Решать уравнения можно по готовому правилу. А для составления уравнений из условия задачи существуют ли какие-нибудь готовые приемы?

Ученик. Нет. Другой раз и не догадаешься, как составить уравнение.

Учитель. А что нужно для решения любой задачи, при составлении любого уравнения?

Ученик (*после размышления*). Нужно думать.

Учитель. Вот мы добрались до основной истины. Для решения любой задачи нужно думать. Вы решаете в школе задачи — много задач — для того, чтобы научиться думать. Вот мы с вами и решим сегодня еще одну задачу вдобавок к тем, которые вы уже решили.

Задача такая:

Найти шестизначное число, которое при умножении на 2, 3, 4, 5, 6 дает также шестизначные числа, написанные теми же цифрами, но в ином порядке.

Если это число обозначить так:

$$N = \overline{a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1},$$

где a_1, a_2, \dots, a_6 обозначают цифры числа, считая справа, то задача состоит в том, что в таблице



$$\begin{aligned}
 N &= a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 \\
 2N &= \\
 3N &= \\
 4N &= \\
 5N &= \\
 6N &=
 \end{aligned}
 \tag{I}$$

надо найти цифры числа N и, кроме того, надо установить, в каком порядке эти цифры стоят на месте точек в нашей таблице.

Как приступить к решению этой задачи?

(Молчание.)

Каким способом решать ее?

(Молчание. После некоторого подбадривания со стороны учителя.)

Ученик. Будем решать при помощи уравнений.

Учитель. Применение уравнений к решению задач есть очень могучее средство. Вы знаете, как облегчает применение уравнений решение арифметических задач.

Один из величайших современных ученых, недавно скончавшийся Альберт Эйнштейн (1879—1955), рассказывал по этому поводу следующее. В первом классе школы он слышал разговоры старших учеников о том, что они изучают какую-то алгебру. Первоклассник Эйнштейн спросил дома дядю, что это за алгебра. Дядя сказал: „Алгебра — это арифметика для лентяев, которым лень думать и решать задачу арифметически“.



А. Эйнштейн

Известный советский физик академик А. Ф. Иоффе пишет про свои первые школьные годы нечто подобное:

„Мною руководил интерес к новым фактам, в таком изобилии рассеянным по книжкам, и к приемам счета — ловко придуманным правилам, заменяющим трудную задачу расчета в уме... Мне эти пра-

вила казались каким-то не очень честным способом, с помощью которого можно, не думая, давать правильный ответ... Потом, когда мне удавалось разобраться „по существу“ в заковыристой задаче, казалось обидным узнать от учителя, что для каждого рода таких задач — с бассейнами, с едущими навстречу путешественниками, с делением наследства — существуют готовые механические шаблоны, дающие правильный ответ без размышлений...“¹

Мы не должны относиться с пренебрежением ни к правилам решения типовых задач, ни к алгебре, которая учит легкому способу решения трудных арифметических задач. Значение алгебры не только в этом. Она учит решать множество задач, которые арифметически решать или нельзя или чрезвычайно трудно и сложно. Когда нам в жизни нужно получить ответ на поставленный математический вопрос и этот ответ можно получить при помощи алгебры, мы ее всегда применяем.

Однако такая возможность использования алгебры не лишает значения арифметические способы решения задач. Последние в большей степени, чем механические приемы и правила, заставляют думать.

Однако вернемся к нашей задаче.

Было предложение решать нашу задачу при помощи уравнений. Как это сделать? Сколько нам нужно уравнений составить?

Ученик. Шесть. Мы должны найти шесть цифр.

Учитель. Будет ли наша задача решена, если мы будем знать искомые шесть цифр?

Ученик. Мы должны знать еще, в каком порядке они разместятся во всех шести числах.

Учитель. Сколько нужно составить уравнений, чтобы найти искомые шесть цифр?

Ученик. Надо составить шесть уравнений и решать систему шести уравнений.

(Смех.)

¹ Акад. А. Ф. Иоффе. Моя жизнь и работа. ГТТИ. 1933, стр. 3.

Это трудно.

Учитель. Систему из шести уравнений все же решить можно; основная трудность решения задачи в составлении такой системы уравнений, которая охватила бы все условия.

Попробуем ее решать другими способами. Вспомним, что нужно делать для решения любой задачи.

Ученик. Надо думать.

Учитель. Попробуем сделать это...

(Молчание.)

Трудно ожидать, что мы сразу найдем все шесть цифр числа. Начнем с какой-нибудь из них.

Что можно сказать о цифре a_6 ?

(Молчание.)

Всякая ли цифра может стоять на первом месте нашего числа?

(Молчание.)

Учитель. Может ли стоять там цифра 0?

Ученик. Не может. У нас в таком случае не было бы шестизначного числа.

Учитель. Может ли a_6 равняться единице?

Ученик. Может.

Учитель. А двум?

Ученик *(после некоторой паузы)*. a_6 не может равняться двум, потому что в таком случае $5N$ было бы семизначным числом.

Учитель. Правильно, молодец! Итак, если искомое нами число существует, то в нем

$$\boxed{a_6 = 1} \dots \dots \dots (1)$$

Какая цифра стоит у числа $2N$ на первом месте? Может ли там стоять также 1?

Ученик. Не может. Если мы число N , у которого на первом месте слева стоит 1, умножим на 2, то у произведения первая цифра слева будет 2.

Учитель. Верно ли, что у второго числа на первом месте должна стоять именно цифра 2?

Ученик. У второго числа на первом месте будет или 2 или 3, в зависимости от того, чему равно a_5 . Если a_5 равно 5 или большему числу, то у числа $2N$ на первом месте будет цифра 3.

Учитель. Не будем пока уточнять вопрос о том, начинается ли второе число с 2 или 3, а сделаем гораздо более важный вывод. Что можно сказать о всех первых слева цифрах искоемых шести чисел?

Ученик (*после размышления*). Первые цифры идут возрастая; у каждого последующего числа первая слева цифра больше, чем у предыдущего числа.

Учитель. Это очень важное заключение. Значит, все шесть первых цифр идут возрастая, начиная с единицы... Какое другое важное заключение можно сделать о цифрах искомого нами числа?

(*Молчание.*)

Раз наши шесть цифр идут возрастая, то могут ли среди них оказаться одинаковые?

Ученик. Конечно, нет.

Учитель. Это весьма важное заключение: эти шесть цифр *различные*... среди них нет одинаковых.

Какая из десяти цифр не может содержаться среди этих шести?

Ученик (*после паузы*). Нуля среди этих шести цифр быть не может.

Учитель. Вот видите, сколько мы уже знаем о цифрах искомого числа! В нем и в произведениях его на 2, 3, 4, 5, 6, то есть у чисел нашей таблицы, на первых слева местах стоят шесть различных цифр, идущих в возрастающем порядке, начиная с единицы. Нуля среди них нет. А в искомом нами числе сколько цифр?

Ученик. Шесть.

Учитель. Стоящие на первых слева местах цифры и цифры искомого числа $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ имеют ли что-нибудь общее?

Ученик. Эти же цифры и стоят на первых местах в таблице, только в числе N они идут в другом порядке.

Учитель. Попробуем теперь сделать общие выводы о цифрах нашего искомого числа.

(После некоторых исправлений.)

Ответ.

Цифры $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ различные . . . (2)

Среди цифр $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ нет нуля . . . (3)

Первые цифры чисел в таблице идут возрастая . (4)

Учитель. Видите, что мы установили об иско-
мом числе.

Займемся цифрой a_1 .

Всякая ли цифра может стоять на первом справа
месте нашего числа?

Ученик. Ноль не может, так как его вообще
нет среди цифр нашего числа.

Другой ученик. И единица не может, так
как она стоит на шестом месте, а цифры искомого
числа все разные.

Учитель. Может ли, например, быть $a_1 = 5$?

Ученик. Нет, не может: если бы a_1 было 5, то
у $2N$ на конце стоял бы ноль. Среди цифр нашего
числа нуля нет.

Учитель. По той же причине какие еще цифры
не могут стоять на первом справа месте искомого
числа?

Ученик. a_1 не может быть четною цифрою,
так как при a_1 четной число $5N$ имело бы на
конце ноль.

Учитель. Значит, a_1 не может быть ни одной
из цифр: 0, 1, 2, 4, 5, 6, 8. Остаются цифры 3, 7, 9,
которые могли бы стоять на первом справа месте
числа N .

Может ли быть $a_1 = 3$?

(Размышления, не давшие положительного результата.)

Это самое трудное место в решении задачи.

Допустим, что $a_1 = 3$. Какие цифры в таком случае стояли бы на месте единиц в числах $N, 2N, 3N, 4N, 5N, 6N$?

Ученик. 3, 6, 9, 2, 5, 8.

Учитель. Возможно ли это?

(Размышления. Определенного ответа не последовало.)

Сколько здесь цифр? И сколько цифр в нашем числе?

Ученик. Шесть и шесть.

Учитель. Могут ли выписанные шесть цифр быть цифрами искомого числа?

(Размышления. Вдруг оживленный ответ.)

Ученик. Не могут. Мы уже знаем, что $a_6 = 1$, а тут еще шесть других цифр; a_1 не может быть 3.

Учитель. Теперь вы сразу установите, может ли a_1 быть 7 или 9.

Ученик. Если $a_1 = 7$, то цифры единиц чисел нашей таблицы будут: 7, 4, 1, 8, 5, 2.

Если $a_1 = 9$, то эти цифры будут: 9, 8, 7, 6, 5, 4.

Отсюда видно, что цифрой единиц числа N 9 не может быть, по той же причине, почему $a_1 \neq 3$. Значит, $a_1 = 7$, если вообще искомого число существует.

Учитель. Запишем: если число N существует, то

$$\boxed{a_1 = 7} \mid \quad (5)$$

Как мы можем переписать теперь нашу таблицу чисел

$N, 2N, 3N, 4N, 5N, 6N$?

Ученик. Мы можем вставить вместо букв и точек уже найденные цифры:

$$\begin{array}{rcl} N & = & 1 \ a_5 \ a_4 \ a_3 \ a_2 \ 7 \\ 2N & = & 2 \ . \ . \ . \ . \ 4 \\ 3N & = & 4 \ . \ . \ . \ . \ 1 \\ 4N & = & 5 \ . \ . \ . \ . \ 8 \\ 5N & = & 7 \ . \ . \ . \ . \ 5 \\ 6N & = & 8 \ . \ . \ . \ . \ 2 \end{array} \quad (II)$$

Первый столбец справа мы могли заполнить — на том основании, что $a_1 = 7$ — умножением 7 на 2, 3, 4, 5, 6, а согласно результату (4) в первом слева столбце те же цифры идут возрастающей.

Учитель. Как найти цифру a_5 ?

Ученик (*с помощью учителя*). a_5 не может быть 1, так как цифра 1 два раза в искомом числе не может повториться. a_5 не может быть 2, так как при таком предположении $3N$ не может иметь первой цифрой 4 (допуская, что a_4 имеет наибольшее возможное значение 8, мы имели бы $128 \times 3 = 384$, и на первом слева месте числа $3N$ мы имели бы не цифру 4, а 3). $a_5 \neq 3$, так как этой цифры вообще нет в искомом числе. Предположение, что $a_5 = 4$, возможно: умножая 14 (первые слева две цифры числа N) на 2, 3, 4, 5, 6, мы получим первые цифры 1, 2, 4, 5, 7, 8; a_5 не может быть 5 или больше 5, так как в данном случае $2N$ имело бы первой цифрой 3. Итак:

$$\boxed{a_5 = 4} \dots \dots \dots (6)$$

Учитель. Правильно. Таким же образом мы могли бы установить и цифры a_4 и a_6 , но это можно сделать короче.

Мы видим, что как в первом, так и в последнем столбце нашей таблицы стоят все наши шесть цифр, только в разном порядке. Можно задать вопрос: не будут ли и в остальных столбцах стоять в каждом те же шесть различных цифр, лишь только каждый раз в особом порядке?

Допустим, что это не так, что в некотором столбце имеются две одинаковые цифры. Допустим, например, что

$$\begin{aligned} 6N &= 8abcd2 \\ 4N &= 5ebfg8, \end{aligned}$$

то есть допустим, что в третьем слева столбце у обоих чисел имеется одинаковая цифра b . Если вычесть почленно эти равенства, то в левой части равенства мы получим $6N - 4N = 2N$. В разности правых частей равенств мы получим в остатке на третьем месте 0, если $c > f$, или 9, если $c < f$. Но так как остаток есть число $2N$, которое может со-

держат только найденные нами уже шесть цифр, среди которых нет ни 0, ни 9, то наше предположение о том, что в каком-нибудь столбце нашей таблицы содержатся одинаковые цифры, не может иметь места. Итак, в каждом столбце таблицы (II) содержатся те же цифры, что и в первом и последнем столбцах. Сумма цифр последнего столбца — 27, такова же сумма цифр во всех остальных столбцах. Складывая почленно равенства (II), имеем:

$$21N = 2999997,$$

откуда

$$N = \frac{2999997}{21} = 142857.$$

Умножая это число на 2, 3, 4, 5, 6, убеждаемся, что число это удовлетворяет условиям задачи, так как все числа таблицы выражаются одними и теми же



шестью цифрами, расположенными лишь в различном порядке:

$$\begin{aligned} N &= 1\ 4\ 2\ 8\ 5\ 7 \\ 2N &= 2\ 8\ 5\ 7\ 1\ 4 \\ 3N &= 4\ 2\ 8\ 5\ 7\ 1 \\ 4N &= 5\ 7\ 1\ 4\ 2\ 8 \\ 5N &= 7\ 1\ 4\ 2\ 8\ 5 \\ 6N &= 8\ 5\ 7\ 1\ 4\ 2 \end{aligned}$$

Итак, искомое число есть

$$\boxed{1\ 4\ 2\ 8\ 5\ 7} \dots \dots \dots (7)$$

Далее вызываются к доске шесть учащихся, которым дается каждому одно из следующих шести заданий: обратить в десятичные дроби $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ и $\frac{6}{7}$. Они, к общему удивлению класса, обнаруживают, что

$$\frac{1}{7} = 0, (142857)$$

$$\frac{2}{7} = 0, (285714)$$

$$\frac{3}{7} = 0, (428571)$$

$$\frac{4}{7} = 0, (571428)$$

$$\frac{5}{7} = 0, (714285)$$

$$\frac{6}{7} = 0, (857142)$$

Оказывается, наши шесть чисел являются периодами обращенных в десятичные дроби дробей $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ и $\frac{6}{7}$. Периодом для $\frac{1}{7}$ является наше

число 142857; все другие периоды образуются из него переносом одной или нескольких первых цифр в конец. Если написать цифры числа 142857 на круге, то все 6 периодов получаются при движении по этому кругу, начиная с определенной цифры: с 1, с 2, с 4, с 5, с 7, с 8. Такой способ образования чисел называется „круговой перестановкой“.

Не вдаваясь в дальнейшие подробности, отметим лишь, что не для всех

дробей имеет место такое правило образования периодов, какое мы видим у дробей $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$ и так далее. Так, например:

$$\frac{1}{11} = 0, (09)$$

$$\frac{2}{11} = 0, (18)$$

$$\frac{3}{11} = 0, (27)$$

.

Урок закончился следующей беседой.

Учитель. Что ж, ребята, была у вас решена тысяча задач, теперь стало 1001, одной решенной задачей больше.

Ученик. Это необычная задача.

Учитель. Почему же не обычная?

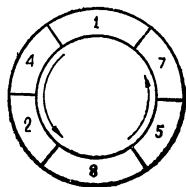
Ученик. Уж очень красиво она решена.

Учитель. Красиво? Да разве красота имеет какое-нибудь значение?

Ученик. А как же! Красивую песню, например, хочется петь, а некрасивую — нет.

Учитель. Верно, ребята. Красота имеет большое значение в каждом деле.

Есть красота и в математике. Одну и ту же задачу можно решить часто разными способами. В математике красиво то, что просто. Если сложная задача решается простыми средствами и кратким путем, это будет красиво. Когда та же задача решается длинным путем и при помощи сложных средств, это будет некрасиво. Великий русский математик П. Л. Чебышев создал направление в математике, для которого одной характерной чертой является требование решать вопросы возможно простыми средствами.



Не бывало ли у вас случаев, когда ваша учительница вам за решение задачи ставила не 5, а 4, хотя задача была решена верно?

Ученики. Бывали.

Учитель. Это бывало в тех случаях, когда вы решили задачу хотя и верно, но некрасиво.

Условимся в дальнейшем следовать правилам, которые в заключение урока и запишем:

Решив задачу, ученик должен задать себе следующих два вопроса:

- 1) верно ли я решил задачу?
- 2) хорошо ли я решал ее?

Только при утвердительном ответе на оба эти вопроса можно ожидать, что работа будет оценена пятеркой.

Урок окончен.

РАССКАЗ ВТОРОЙ

о том, что при решении задач нужно внимательно относиться к каждому слову условия

При решении задачи важно обратить внимание на каждое слово ее условия. Иногда возможность решения задачи зависит от таких слов в условии, которые на первый взгляд кажутся несущественными.

Следующие две задачи представляют примеры таких задач, решение которых зависит от внимательного отношения к каждому слову условия.



ЗАДАЧА 1

У отца было три сына, которые все хорошо учились. Ему захотелось проверить, кто из них самый остроумный. Для этого было проведено следующее испытание.

Было взято 5 фуражек. На трех из них на глазах мальчиков были прикреплены красные звезды, на двух — белые. Мальчикам завязали глаза, затем надели каждому на голову фуражку, а две остальные фуражки удалили. После этого у мальчиков сняли повязки с глаз и задали вопрос: какая — красная или белая — звезда у него на фуражке?

Подумав некоторое время, один из мальчиков сказал, какая на его фуражке звезда, и правильно обосновал свой ответ.

Вопрос читателям:

Какая звезда была на фуражке этого мальчика, как он узнал это и какие звезды были на фуражках других двух мальчиков?

Примечание. Не обращайтесь к изложению решения, не попытавшись решить задачу самостоятельно.

Решение

Для решения задачи существенно указание, что мальчик мог ответить только *после того, как подумал некоторое время*.

На трех фуражках могли быть только следующие распределения звезд:

- 1) белая белая красная
- 2) белая красная красная
- 3) красная красная красная

Если бы имел место первый случай, то третий мальчик, зная, что имеются только две белые звезды, сразу бы сказал, что у него на фуражке красная звезда. *Думать в этом случае не понадобилось бы.*

Если бы имело место второе распределение звезд, то второй (равно как и третий) мальчик, видя у одного из братьев белую, а у другого красную звезду, должен был бы сразу сказать, что у него на фуражке красная звезда, так как, будь у него белая звезда, то третий брат сразу бы заявил, что у него красная звезда. И в этом случае думать не понадобилось бы.

Так как по условию задачи *ответ последовал лишь после того, как мальчик подумал некоторое время*, то имело место третье распределение звезд, так как каждому из мальчиков нужно было выждать, не заявят ли другие о цвете своих звезд.

Итак, у всех мальчиков были надеты фуражки с красной звездой, все мальчики в решении вопроса были в одинаковых условиях, поэтому ответ того мальчика, который первым заявил, что у него красная звезда, действительно выявлял самого сообразительного среди троих.



Если бы в условии задачи не стояли слова, что мальчик ответил „*подумав некоторое время*“, то задачу вообще нельзя было бы решить.



После решения задачи 1 внимательный читатель может решить задачу 2, которая хотя и более сложная по содержанию и требует некоторых вычислений, но по существу и способу решения близка к задаче 1.



Попытайтесь решить ее самостоятельно, не заглядывая в даваемое нами решение раньше, чем сами решили ее или пришли к окончательному выводу, что самостоятельное решение ее для вас непосильно.



ЗАДАЧА 2

В одном из рассказов известного английского писателя А. Конан-Дойля „Приключения Шерлока Холмса“ содержится такая задача.

„Доктор Уотсон и его гость Шерлок Холмс сидят при открытом окне. Из сада доносятся веселые голоса большой группы детей.

Гость. Скажите, пожалуйста, сколько у вас детей?

Хозяин. Тут не только мои, а дети четырех семей. Моя команда самая многочисленная, братина — меньше, сестрина — еще меньше, а дети дяди — самая малочисленная группа. Они шумят так беспорядочно, так как их не хватает для двух команд по девять человек в каждой. Любопытное совпадение: если перемножить четыре числа, выражающие количество детей наших семей, то получим номер нашего дома, который вы знаете.

Гость. Я ведь учился в школе математике! Попробую вычислить число детей каждой из семей.

После некоторых вычислений гость заявил:



Для решения задачи данных мало. Скажите, были у дяди один ребенок или больше?

Хозяин дал требуемый ответ, содержания которого мы не знаем.

Гость. Теперь я могу дать точный ответ о числе детей!

Он действительно дал правильный ответ.

Вопрос: Какой был номер дома и сколько было детей в каждой из четырех семей?

Решение

Гость решал задачу, очевидно, таким образом. Он знал, что детей всех четырех семей меньше 18. Он знал номер дома N .

Если обозначить числа детей четырех семей буквами a, b, c, d , то все эти числа целые и положительные, номер дома N равен их произведению.

$$N = abcd,$$

где $a > b > c > d$ и $a + b + c + d < 18$.

Гостю нужно было подобрать такие четыре различных целых числа, чтобы их произведение было N и чтобы сумма их была меньше 18. Но нахождение чисел гостю не удалось, и он должен был спросить, был ли у дяди один ребенок или больше. Только после этого гость мог дать точный ответ на вопрос задачи.

Мы при решении задачи находимся в более трудном положении, так как мы не знаем номера дома N ; поэтому решать по тому плану, как ее решал гость, мы не можем.

Однако все же решить задачу мы в состоянии, если... если несколько подумать.

Прежде всего решим вопрос: сколько детей могло быть у дяди?

Легко убедиться, что у него не могло быть троих детей.

Если предположить, что число детей дяди $d = 3$, то имели бы: c не меньше 4, b не меньше 5, a не меньше 6, а всего вместе детей не меньше

$$3 + 4 + 5 + 6 = 18.$$

Однако детей было менее 18. Следовательно, у дяди могло быть или 2 ребенка, или один.

Составим таблицу всех возможных случаев произведений четырех различных целых чисел таких, чтобы наименьшее число было 2, а сумма четырех чисел меньше 18.

Таких случаев имеется всего семь:

Числа	Сумма их	Произведение
$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$	14	120
$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$	15	144
$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7$	16	168
$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8$	17	192
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6$	16	180
$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	17	210
$2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$	17	240

При предположении, что у дяди было двое детей, возможны семь различных решений относительно числа детей в четырех семьях, если лишь удовлетворить требованию, чтобы число всех детей было меньше 18.

Предположив, что у дяди был только один ребенок, составим таким же образом все случаи произведений четырех различных целых чисел, среди которых наименьшее число есть 1, а сумма всех четырех чисел меньше 18. Таких четверок чисел будет уже большое число.¹ Однако для решения задачи нам нет надобности составить таблицу всех возможных произведений таких чисел, если *внимательно отнестись к условию задачи*.

Гость, решая задачу, заявил, что данных для получения точного ответа мало, что он должен знать, был ли у дяди один ребенок или больше. Почему это было необходимо знать решающему задачу, исходя из известного ему числа N (номера дома)? Очевидно, что номер дома N был такой, что он являлся произведением четырех различных целых чисел как в случае, если за наименьшее число взять 1, так и в случае, если наименьшее число есть 2.

¹ Составьте таблицу их!

Это обстоятельство дает нам возможность найти число N (номер дома): это число должно содержаться в составленной нами выше таблице и также содержаться в таблице произведений четырех чисел, начинающихся с 1.

Так как в первой нашей таблице наименьшее произведение 120, то, составляя таблицу произведений четырех различных чисел с наименьшим множителем 1, мы можем ограничиться только теми случаями четырех множителей, произведение которых не менее 120, и этим сократить вычисления.

Таковых очень мало.

Числа	Сумма их	Произведение
$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8$	17	120
$1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7$	17	126
$1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$	16	120
$1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7$	17	140

Мы видим, что единственное общее число в обеих группах произведений 120. Очевидно, что номер дома

$$N = 120.$$

Сколько же было детей в каждой из четырех семей? Произведение 120 получается в трех случаях:

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 = 120$$

$$1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$$

Внимательное чтение условия задачи и в этом случае дает возможность решить вопрос задачи.

Гость сказал, что после того, как ему станет известно, был ли у дяди один ребенок или больше, он может *точно* ответить на вопрос задачи о числе детей каждой из четырех семей.

Если бы гостю сказали, что у дяди был один ребенок, то он не мог бы дать точного ответа о числе детей, так как номер дома, $N = 120$, получается в двух возможных случаях, именно при:

$$d = 1, c = 3, b = 5, a = 8$$

и

$$d = 1, c = 4, b = 5, a = 6.$$

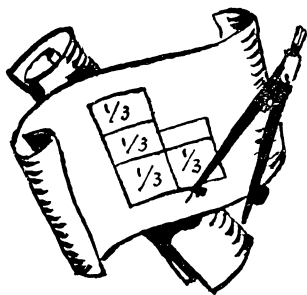
Так как гость мог дать определенный ответ, то ему было сказано, что у дяди двое детей, и тогда номер дома $N=120$ получается только в том случае, если

$$d=2, c=3, b=4, a=5.$$

Задачу, для решения которой на первый взгляд как будто не было достаточных данных, оказалось возможным решить, но при условии *внимательного отношения к каждому слову*. Будем это требование помнить при решении каждой задачи.

РАССКАЗ ТРЕТИЙ

о том, как чертеж иногда помогает решить задачу



Основой всей математики является арифметика. В житейской практике чаще всего приходится решать арифметические задачи. Они, как мы уже видели, бывают часто трудные и нелегко поддаются чисто арифметическому решению.

На помощь решающему приходит алгебра, но практика показывает, что и составление уравнения из условия задачи для ее решения бывает часто трудно, так как это составление нельзя выполнить по какому-нибудь общему для всех задач правилу, а к каждому типу задач нужно подходить по-особому. Словом, при составлении уравнения по условию задачи каждый раз надо думать.

Часто составление уравнения и решение задачи облегчаются построением соответствующего условию задачи чертежа. Покажем это на паре примеров.

1. ЗАДАЧА Л. Н. ТОЛСТОГО

Известный профессор физики А. В. Цингер в своих воспоминаниях рассказывает, что Льву Николаевичу Толстому очень нравилась следующая задача:

„Артели косцов надо было скосить два луга, один вдвое больше другого. Половину дня вся артель косила большой луг. После этого артель разделилась пополам: первая половина осталась на большом лугу и докосила его к вечеру; вторая же половина артели



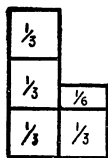
косила малый луг, на котором к вечеру еще остался участок, который один косарь скосил за день.

Сколько косцов было в артели?”

Задачу эту можно решить чисто арифметически, но требуется, как всегда при арифметическом решении задач, догадка. Проще решить эту задачу, как все арифметические задачи, алгебраически, при помощи уравнений. Помня высказывание, что „алгебра — это арифметика для лентяев“, и не желая попасть в число „лентяев“, попробуем решить эту задачу без применения уравнений. Оказывается, это можно легко сделать — и это, пожалуй, самый простой способ решения — применением геометрических фигур.

Изобразим оба луга следующей фигурой, в которой левый прямоугольник представляет больший луг, правый, в два раза меньший первого, — меньший луг.

Чтобы скосить весь больший луг, вся артель работала первую половину дня, а вторую половину дня работала половина артели. Иными словами, половине артели нужно было бы работать трижды по $\frac{1}{2}$ дня, чтобы скосить больший луг (все



косцы считаются одинаково сильными). Таким образом, половина артели в половину дня скосила $\frac{1}{3}$ бóльшего луга.

Так как меньший луг, представляющий половину бóльшего, составляет $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ бóльшего луга (принимая бóльший луг за $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, имеем для величины меньшего луга $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$) и во вторую половину дня половина артели на нем скосила одну треть бóльшего луга, то остался нескошенным в конце дня участок, равный одной шестой части бóльшего луга. По условию задачи этот остаток может скосить один косец за день.

Вся артель за день скосила весь бóльший луг и часть меньшего, равную $\frac{1}{3}$, или $\frac{2}{6}$, частям бóльшего луга; следовательно, артель за день скосила всего

$$1 + \frac{2}{6} = \frac{6}{6} + \frac{2}{6} = \frac{8}{6}$$

частей бóльшего луга. Так как один косец за день может скосить $\frac{1}{6}$ часть бóльшего луга, то для того, чтобы скосить за день $\frac{8}{6}$ частей бóльшего луга, артель должна состоять из 8 человек.

Примечание. А. В. Цингер сообщает историю этой задачи.

Отец А. В. Цингера, известный профессор математики Московского университета Василий Яковлевич *Цингер* (1836—1907), и дядя Александра Васильевича И. И. Раевский, близкий друг Л. Н. Толстого, учились одновременно в Московском университете. У них был очень способный товарищ, студент Петров, умерший очень молодым. Этот Петров утверждал, что школа приучает учащихся решать главным образом задачи определенных типов („шаблонные“) шаблонными способами. Этим более способные учащиеся как бы принуждаются при решении задач следовать шаблонам, в то время когда они могли бы иногда давать оригинальные способы решения, которые часто

проще шаблонных. Петров занимался придумыванием таких задач, в числе которых была и предлагаемая здесь задача о косцах, которая через И. И. Раевского и В. Я. Цингера, также близкого к великому писателю, стала известной и Л. Н. Толстому.



А. В. Цингер

Толстой до конца дней своих интересовался преподаванием арифметики в школе (он написал учебник арифметики) и в частности задачами, которые, являясь на вид весьма сложными, однако часто имеют простое решение. А. В. Цингер рассказывает, что Л. Н. Толстой, будучи уже в очень преклонном возрасте, при встрече с ним восхищался задачей о косцах и особенно тем, что использование чертежа при решении ее делает задачу совершенно ясной. В этой оценке значения использования геометрических образов при решении задач Л. Н. Толстой безусловно прав.

Несколько слов о Цингерах — отце и сыне.

Василий Яковлевич Цингер — основоположник геометрического направления в Московском университете. Он был одновременно большим знатоком ботаники и был удостоен высшей ученой степени в этой области науки: помимо степени доктора математики, он был и доктором ботаники. Один из сыновей его был профессором ботаники, другой — профессором астрономии, третий — Александр Васильевич — профессором физики. Последний унаследовал от отца любовь к ботанике и, кроме большого числа книг по физике, написал книгу „Занимательная ботаника“, которая читается с большим интересом, чем многие книги по ботанике, написанные специалистами этой науки.

Л. Н. Толстой мерил каждого человека дробью, числителем которой является оценка этого человека другими людьми, что в общем более или менее соответствует действительности, знаменателем — собственное мнение человека о себе, что не всегда соответствует действительности и часто является преувеличенным.

Про А. В. Цингера Л. Н. Толстой говорил:

„У Цингера при значительном числителе очень маленький знаменатель, это делает его большой величиной“.

2. ЗАДАЧА О ТРЕХ МАЛЬЧИКАХ-ВЕЛОСИПЕДИСТАХ

Из места A в место B направляются три мальчика. Расстояние от A до B 36 км. Мальчики имеют велосипед, на котором могут усесться только двое. При такой езде велосипед движется в 3 раза скорее, чем пеший.

Мальчики решили отправиться следующим образом. Двое едут на велосипеде, третий отправляется пешком. Велосипедист, доехав до некоторой точки C , отпускает второго мальчика, который продолжает путь пешком. Велосипедист возвращается обратно, навстречу третьему мальчику, в некоторой точке D встречает его, усаживает на велосипед и направляется к точке назначения B .

На каком расстоянии от начальной точки A находятся точки поворота велосипеда C и D , если требуется, чтобы все три мальчика пришли к месту назначения B одновременно?

Предполагается, что велосипед имеет постоянную скорость и пешеходные скорости всех мальчиков одинаковые.

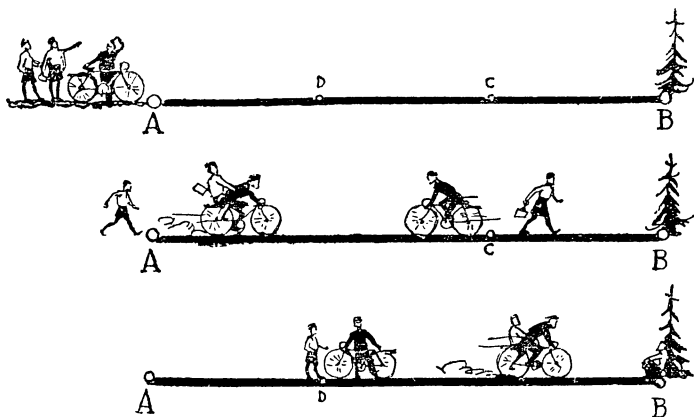
Решение

Задача решается легко, если воспользоваться чертежом.

Пусть первый мальчик правит велосипедом, следовательно, весь путь проделает на велосипеде. От точки A до C второй мальчик ехал на велосипеде и затем от точки C до B шел пешком. Третий мальчик от A до D шел пешком, а с точки D до B на велосипеде.

Все три мальчика проделали путь в один и тот же промежуток времени.

За время, в которое второй мальчик пешком прошел путь CB , велосипед проехал путь $CD + DC + CB$. Так как велосипед движется в три раза скорее



пешехода, то путь, пройденный велосипедом $CD + DC + CB$, равен тройному пути CB , то есть

$$CD + DC + CB = 3CB.$$

Но $CD + DC = 2DC$, откуда

$$2DC + CB = 3CB,$$

$$2DC = 2CB,$$

$$DC = CB.$$

За то время, в которое третий мальчик прошел пешком путь AD , велосипед успел сделать путь $AD + DC + CD$, который по условию задачи равняется утроенному пути AD :

$$AD + DC + CD = 3 AD.$$

Отсюда, так же как в предыдущем рассуждении, имеем:

$$DC + CD = 2DC,$$

$$AD + 2DC = 3AD,$$

$$2DC = 2AD,$$

$$DC = AD.$$

Таким образом, получили результаты:

$$DC = CB \text{ и } DC = AD.$$

Два отрезка CB и AD , равные одному и тому же третьему отрезку DC , равны между собою; и мы имеем

$$AD = DC = CB.$$

Поворотные точки движения велосипеда D и C делят весь путь AB на три равные части:

$$AD = 12 \text{ км}, AC = 24 \text{ км}.$$

3. ЗАДАЧА О СТРЕЛКАХ ЧАСОВ

В какие моменты в течение 12 часов, начиная с 0 часов 0 минут, минутная стрелка покрывает часовую?

Арифметическое (алгебраическое) решение задачи требует отдельного вычисления для каждого часа.

В первый час совпадение стрелок было в 0 часов 0 минут.



Для второго часа рассуждаем так. В 1 час 0 минут минутная стрелка стояла над нулевой отметкой деления круга циферблата, часовая — над пятой. Для совпадения стрелок минутная стрелка должна пройти $5 + x$ делений, часовая стрелка x делений. Так как минутная стрелка движется в 12 раз скорее часовой и стрелки двигались от момента 1 час 0 минут одинаковое время, то $5 + x = 12x$, откуда $11x = 5$, $x = \frac{5}{11}$ делений циферблата. Минутная стрелка после 1 часа 0 минут прошла $5 \frac{5}{11}$ делений, что соответствует моменту 1 час $5 \frac{5}{11}$ минуты.

Для второго часа получим аналогично:

$$10 + y = 12y, \quad 11y = 10, \quad y = \frac{10}{11} \text{ делений циферблата.}$$

Минутная стрелка после 2 часов 0 минут прошла $10 \frac{10}{11}$ делений циферблата, что соответствует моменту 2 часа $10 \frac{10}{11}$ минуты.

Вычисляя таким же образом моменты совпадения стрелок для каждого из следующих часов, получим таблицу покрытий стрелок:

Точные	Округленные
0 час. 0 мин.	0 час. 0 мин.
1 час $5\frac{5}{11}$ мин.	1 час 5,4 мин.
2 часа $10\frac{10}{11}$ мин.	2 часа 10,9 мин.
3 часа $16\frac{4}{11}$ мин.	3 часа 16,4 мин.
4 часа $21\frac{9}{11}$ мин.	4 часа 21,8 мин.
5 час. $27\frac{3}{11}$ мин.	5 час. 27,3 мин.
6 час. $32\frac{8}{11}$ мин.	6 час. 32,7 мин.
7 час. $38\frac{2}{11}$ мин.	7 час. 38,2 мин.
8 час. $43\frac{7}{11}$ мин.	8 час. 43,6 мин.
9 час. $49\frac{1}{11}$ мин.	9 час. 49,1 мин.
10 час. $54\frac{6}{11}$ мин.	10 час. 54,5 мин.
11 час. 60 мин.	11 час. 60 мин.

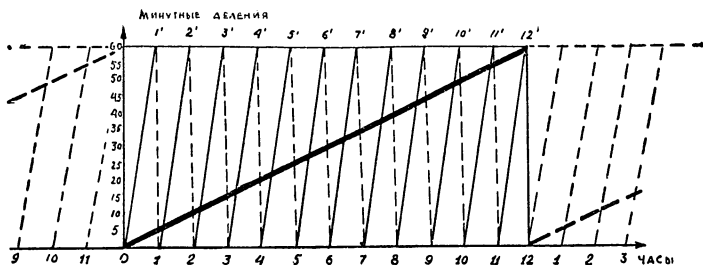
Последний момент совпадения положения стрелок является одновременно моментом совпадения для двенадцатого часа и следующего за ним первого часа.

Таблица показывает, что совпадения положений стрелок происходят через каждые $65\frac{5}{11}$ минуты; между двумя совпадениями положений стрелок минутная стрелка проходит x делений, часовая стрелка $x - 60$ делений, двигаясь в 12 раз медленнее.

$$\frac{x}{12} = x - 60, \quad x - \frac{x}{12} = 60, \quad \frac{11}{12}x = 60, \quad x = 65\frac{5}{11}.$$

Графическое решение задачи

Отложим на оси x (оси абсцисс) часы от 1 до 12, на оси y (оси ординат) — деления циферблата часов, выражающие минуты для полученного момента времени. График положения часовой стрелки изображается прямой, идущей от точки $(0; 0)$ к точке



(12; 60), как график равномерного движения прямо пропорциональной зависимости y от x .

График положения минутной стрелки за каждый отдельный час изображается прямыми, идущими от точки (0; 0) к точке (1; 60) для первого часа, от точки (1; 0) к точке (2; 60) для второго часа и так далее (за каждый час минутная стрелка равномерно проходит от нулевого деления до шестидесятого).

Моменты совпадения стрелок соответствуют на чертеже точкам пересечения графика движения часовой стрелки (жирной наклонной) с графиком движения минутной стрелки (12 тонких наклонных). При аккуратном построении графиков и при больших размерах чертежа можно из него получить те округленные значения моментов совпадения стрелок, которые даны во втором столбце нашей таблицы; полные часы для определенного момента берутся по оси часов, минуты — по числу делений от оси x до точки пересечения обеих наклонных. Так, между 9 и 10 часами находим, что в полосе между 9 и 10 часами по оси x наклонные пересекаются в точке на расстоянии 49 с небольшим делений от оси x , что дает для момента совпадения стрелок 9 часов 49,1 минуты.

Примечание. Решение вопроса, когда, считая от 0 часов 0 минут, минутная стрелка догонит часовую, является частным случаем древней задачи об Ахиллесе (быстроногий сказочный герой греков) и черепахе. Относительно их решался вопрос: догонит ли Ахиллес черепаху, если Ахиллес движется в 10 раз скорее черепахи, но черепаха в начальный момент

была на некотором расстоянии, принимаемом за единицу длины, впереди Ахиллеса? За время, в которое Ахиллес пробежит расстояние, равное единице, черепаха уйдет вперед на $\frac{1}{10}$; пока Ахиллес пробежит эту $\frac{1}{10}$, черепаха уйдет вперед на $\frac{1}{100}$; пока Ахиллес пройдет эту $\frac{1}{100}$, черепаха уходит на $\frac{1}{1000}$ первоначального между ними расстояния, и так далее. Может показаться, что Ахиллес никогда черепаху не догонит, так как всегда как будто остается между ними некоторая, пусть малая, доля первоначального расстояния.

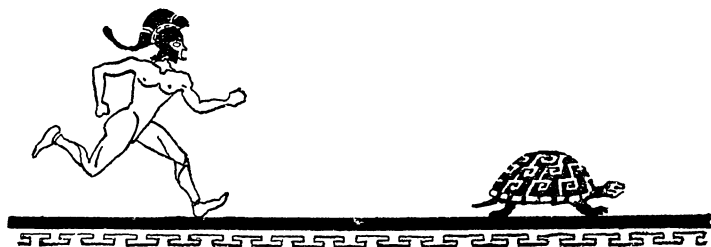
В курсе алгебры IX класса показывается, как вычислить путь, в конце которого Ахиллес догонит черепаху, равный

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$$

первоначального расстояния между Ахиллесом и черепахой, путь, который Ахиллес пробежит за время, равное числу секунд, получаемому от деления $\frac{10}{9} : v$ (v — скорость Ахиллеса).

В вопросе о стрелках часов мы имеем ту же задачу.

В 0 часов 0 минут минутная и часовая стрелки совпадали. Чтобы вновь покрыть часовую стрелку, минутная стрелка должна пробежать один полный оборот и затем $\frac{1}{12}$ его, которую за это время прошла часовая



стрелка; пока минутная стрелка пройдет $\frac{1}{12}$ оборота, часовая ушла вперед на $\frac{1}{12^2}$ часть оборота, и так далее, как в задаче об Ахиллесе и черепахе.

Минутная стрелка, чтобы догнать часовую, должна пройти

$$1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{12}} = \frac{12}{11}$$

полного оборота, что потребует $1 \frac{1}{11}$ часа, или 1 часа $5 \frac{5}{11}$ минут.

РАССКАЗ ЧЕТВЕРТЫЙ

о том, как чертеж помогает при получении формул

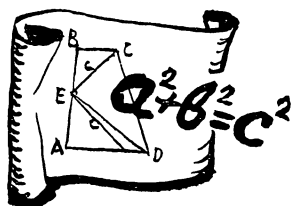
1. ДОКАЗАТЬ ПРИ ПОМОЩИ ЧЕРТЕЖА РАВЕНСТВО

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

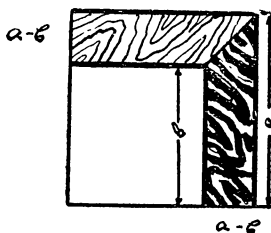
Решение

Имеем два квадрата: один со стороной a , другой со стороной b . Заштрихованная площадь равна разности площадей данных квадратов, то есть

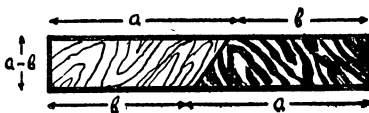
$$a^2 - b^2.$$



Разместим так заштрихованные фигуры.



$$a^2 - b^2$$



$$(a + b)(a - b)$$

Площадь полученного прямоугольника равна произведению его основания на высоту, то есть

$$(a + b)(a - b),$$

Получили два выражения для величины одной и той же площади, то есть

$$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

Примечание. Полученный результат можно использовать для доказательства весьма важного предложения:

из прямоугольников с данной длиной периметра наибольшую площадь имеет тот, у которого длина и ширина равны, то есть квадрат, имеющий ту же длину периметра.

Доказательство

Обозначим большую сторону прямоугольника через $a + b$, меньшую — через $a - b$. Тогда периметр прямоугольника равен

$$2(a + b) + 2(a - b) = 4a,$$

а площадь равна

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Очевидно, что площадь $a^2 - b^2$ будет наибольшей, если $b = 0$. В таком случае обе стороны прямоугольника равны a и прямоугольник будет квадратом.

Числовой пример

Пусть стороны прямоугольника 19 и 13; периметр прямоугольника

$$2 \cdot 19 + 2 \cdot 13 = 64 = 4 \cdot 16.$$

Из всех прямоугольников, имеющих периметр 64, наибольшую площадь имеет квадрат со стороной 16. Проверим этот вывод на числовых примерах.

Площадь квадрата со стороной 16 равна $16^2 = 256$.

Прямоугольник со сторонами 17 и 15 имеет площадь $17 \cdot 15 = 255$.

Чем более отличаются друг от друга по величине длина и ширина прямоугольника при постоянном периметре (64), тем меньшей оказывается площадь.

Длина	Ширина	Площадь
16	16	256
17	15	255
18	14	252
• • • • •	• • • • •	• • • • •
30	2	60
31	1	31

Эти наблюдения подсказывают доказанное выше положение: *из прямоугольников, имеющих данный периметр, наибольшую площадь имеет квадрат.* Это положение равносильно другому: *из всех прямоугольников, имеющих равные площади, наименьший периметр имеет квадрат; или такому: произведение двух сомножителей, имеющих данную сумму, будет наибольшим, когда множители эти равны.*

Примечание 1. Фигуры, имеющие равные периметры, называются *изопериметрическими*. Доказанную теорему можно поэтому выразить и так:

из изопериметрических прямоугольников наибольшую площадь имеет квадрат.

Примечание 2. Многие народы, возможно все, в прежнее время считали, что фигуры, имеющие равные периметры (изопериметрические фигуры), имеют и равные площади (являются равновеликими). Так, например, римский писатель Гораций упрекает своих современников за то, что они придерживаются такого ложного взгляда. На основании этого взгляда, например, считали, что круг равновелик квадрату, периметр которого равен длине окружности. Неправильность такого взгляда очевидна.

Длина окружности равна $6,28 \cdot r$ (r — радиус круга), площадь круга — $3,14 \cdot r^2$ (оба результата приближенные). Если круг обвести веревкой и из последней образовать квадрат, то сторона квадрата будет равна $\frac{6,28 \cdot r}{4} = \frac{3,14}{2} \cdot r$, а площадь этого квадрата равна $\frac{3,14^2 \cdot r^2}{4}$. Это число не совпадает с числом $3,14 \cdot r^2$, выражающим площадь круга.

Примечание 3. В рассказе Л. Н. Толстого „Много ли человеку земли нужно“ башкиры продают за

1000 рублей такой участок земли, который покупатель может обежать за день. Жадный покупатель Пахом, стараясь получить больше земли за свои 1000 рублей, бежит так быстро, что выбивается из сил и, не успев вернуться к закату солнца к башкирам, падает мертвым. Очевидно из доказанного выше положения о площадях изопериметрических прямоугольников, что Пахому, если он решил вырезать себе прямоугольный участок земли, выгоднее было обежать квадратное поле или прямоугольник, у которого длина и ширина отличались бы возможно мало между собою.

Из всех изопериметрических фигур наибольшую площадь имеет круг.

Некоторые применения формулы

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

1. Быстрое нахождение произведений некоторых чисел.

$$97 \cdot 103 = (100 - 3)(100 + 3) = 10000 - 9 = 9991$$

$$54 \cdot 46 = (50 + 4)(50 - 4) = 2500 - 16 = 2484$$

$$19 \cdot 13 = (16 + 3)(16 - 3) = 256 - 9 = 247$$

$$26 \cdot 14 = (20 + 6)(20 - 6) = 400 - 36 = 364$$

и т. д.

и т. д.

2. Для подобных умножений можно пользоваться другим следствием найденной формулы.

$$\begin{aligned} \text{Из } (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2 \text{ следует:} \\ a^2 &= (a + b)(a - b) + b^2. \end{aligned}$$

Если помнить квадраты небольших чисел, то легко поступать так:

$$83^2 = (83 + 17)(83 - 17) + 17^2 = 100 \cdot 66 + 289 = 6889$$

$$\begin{aligned} 978^2 &= (978 + 22)(978 - 22) + 22^2 = 1000 \cdot 956 + 484 = \\ &= 956484 \end{aligned}$$

3. Интересные равенства:

$$6^2 - 5^2 = 11$$

$$56^2 - 45^2 = 111$$

$$556^2 - 445^2 = 111111$$

$$5556^2 - 4445^2 = 11111111$$

$$55556^2 - 44445^2 = 111111111$$

Эти равенства выводятся следующим образом. Пусть, например, $a + b = 1001$, $a - b = 111$. Находим a и b :

$$\begin{aligned} a + b &= 1001, \\ a - b &= 111. \end{aligned}$$

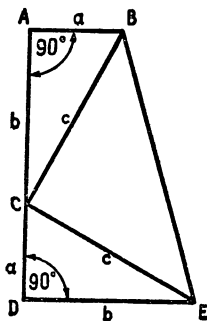
Складывая и вычитая почленно эти равенства, имеем:

$$\begin{aligned} 2a &= 1112, \quad a = 556; \\ 2b &= 890, \quad b = 445. \end{aligned}$$

Принимая $a + b$ и $a - b$ равными соответственно: 101 и 11, 10001 и 1111 и так далее, получаем остальные числа нашей таблицы.

2. ПОЛУЧЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ИЗ ЧЕРТЕЖА

Дана трапеция $ADEB$, основания которой равны a и b , углы A и D прямые, а высота равна $a + b$.



Пусть точка C делит высоту трапеции на части a и b . Соединим точку C с точками B и E и обозначим отрезок BC , равный CE , буквою c (равенство их следует из очевидного равенства треугольников ABC и CDE).

Площадь трапеции равна

$$\frac{a + b}{2} \cdot (a + b) = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2}.$$

Треугольник BCE прямоугольный, так как сумма $\angle ACB + \angle DCE$ равна прямому углу и, следовательно, $\angle BCE$ прямой.

Так как площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов его, то площадь трапеции, как сумма площадей трех прямоугольных треугольников, равна

$$\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} = ab + \frac{c^2}{2}.$$

Приравнивая полученные два выражения для площади трапеции, имеем

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} = ab + \frac{c^2}{2}$$

или:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} + ab = ab + \frac{c^2}{2}$$

или:

$$a^2 + b^2 = c^2:$$

сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника равна квадрату гипотенузы (предполагается, что все стороны треугольника измерены одной мерой).

РАССКАЗ ПЯТЫЙ

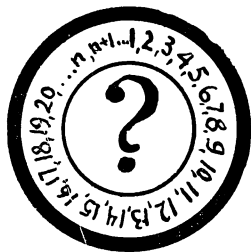
о решении некоторых вопросов о натуральных числах

При решении задач мы пользуемся разными числами (в арифметике — целыми, дробными, нулем; в алгебре — отрицательными и другими). Числа 1, 2, 3, 4 и так далее называются *натуральными*. Они возникли в жизни человека ранее других видов чисел, при счете предметов.

Последовательность натуральных чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8..., которую можно продолжать как угодно далеко, называется *рядом натуральных чисел* или *натуральным рядом* (точки после цифры 8 означают, что надо продолжать счет дальше).

Натуральные числа являются основанием для образования всех остальных видов чисел. Изучение их в течение первых четырех лет обучения в школе является основой дальнейших занятий математикой. Хорошее усвоение свойств ряда натуральных чисел очень важно для этих занятий.

Решим несколько простейших задач о ряде натуральных чисел. Любое, безразлично какое, натуральное число обозначаем буквою n . Следующее за ним натуральное число получается прибавлением к нему единицы и изображается так: $n + 1$. Основным свойством натурального ряда и является тот

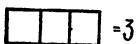




факт, что за каждым числом этого ряда n следует число $n+1$.



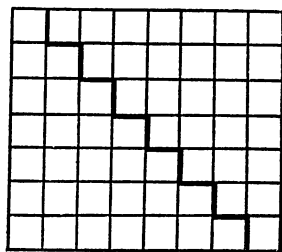
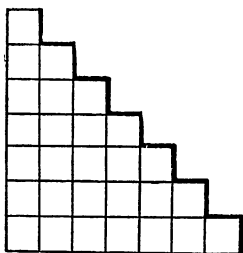
1. Найти сумму n первых натуральных чисел



$$1+2+3+\dots+n.$$

Изобразим числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 соответственным числом квадратов:

Соединяя эти фигуры, получаем фигуру, изображающую сумму чисел $1+2+\dots+7$.



Число клеток в построенной фигуре равно сумме чисел $1+2+3+\dots+7$.

Если начертить две такие фигуры и соединить их так, как показано на чертеже, то мы получим прямоугольник, у которого одна сторона (основание) содержит 8 клеток, другая сторона (высота) — 7 клеток. Всего в нашей фигуре $7 \cdot 8$ клеток.

Так как каждая из треугольных фигур изображала сумму $1+2+3+\dots+7$ и наш прямоугольник получился соединением двух треугольных фигур, то он изображает двойную сумму чисел $1+2+3+\dots+7$. Следовательно,

$$1+2+3+\dots+7=\frac{7 \cdot 8}{2}.$$

Очевидно, что построение, выполненное нами для суммы первых семи чисел натурального ряда, может быть сделано для любого количества n первых чисел натурального ряда. Поставив вместо цифры 7 букву n , имеем:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Правило: для получения суммы n первых чисел натурального ряда надо число n помножить на следующее за ним натуральное число и произведение разделить на 2.

$$\text{Так: } 1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050;$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 200 = \frac{200 \cdot 201}{2} = 20100 \text{ и т. д.}$$

Про знаменитого немецкого математика Карла Фридриха Гаусса (1777—1855) рассказывается, что он в шестилетнем возрасте открыл указанное выше правило. Он записал числа от 1 до 100, сумму которых нужно было найти, два раза следующим образом:

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + 4 \dots + 98 + 99 + 100 \\ 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 3 + 2 + 1. \end{array}$$

Складывая по столбцам, он обнаружил, что числа каждого столбца в сумме дают 101. Столбцов 100, поэтому в общей сумме получится $100 \cdot 101$; это произведение надо разделить на два, так как слагаемые числа были написаны дважды. В результате шестилетний математик сделал первое из своих очень многочисленных и очень важных открытий, именно, что

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = \\ = \frac{n(n + 1)}{2}. \end{aligned}$$



К. Ф. Гаусс

2. О нечетных числах

Греческий математик *Пифагор* (VI век до начала нашего летосчисления, то есть 2500 лет назад) ввел деление натуральных чисел на *четные* и *нечетные*. Четными он назвал числа, которые делятся без

остатка на 2 (представляют сумму двух равных слагаемых); остальные натуральные числа получили название нечетных.

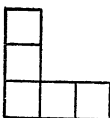
Один из крупных специалистов по высшей арифметике, или теории чисел, нашего времени пишет по этому поводу: „Пифагору и его ученикам приписывается очень много важных открытий в математике. Не последним среди них является введение деления натуральных чисел на четные и нечетные. С этого шага начинается научная арифметика — изучение числа, много тысячелетий после того, как человек уже пользовался числом для своих практических надобностей“. В настоящее время ученик IV класса знакомится с теми понятиями, которые 2500 лет назад были последним словом науки. Решим один вопрос арифметики о нечетных числах.

Найти сумму n первых нечетных чисел натурального ряда

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1).$$

Тут написаны первые n нечетных чисел натурального ряда. Первое нечетное число 1 может быть представлено так: $2 \cdot 1 - 1$, второе нечетное число $3 = 2 \cdot 2 - 1$, третье нечетное число $5 = 2 \cdot 3 - 1$ и так далее, n -е нечетное число $2n - 1$, $(n - 1)$ -е нечетное число $2(n - 1) - 1 = 2n - 2 - 1 = 2n - 3$.

Изобразим нечетные числа 1, 3, 5, 7, 9 фигурами.

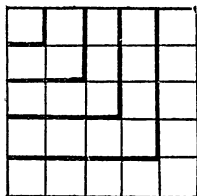


Беря первые 5 нечетных чисел, составим из изображающих их фигур новую, дающую сумму этих чисел. Получили квадрат, содержащий $5^2 = 25$ квадратиков: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$.

Выполненное нами построение можно применить к любому количеству первых нечетных чисел натурального ряда. Мы получили правило:

Сумма любого количества первых нечетных чисел натурального ряда равна квадрату (второй степени) числа слагаемых.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$



Так, сумма первых 100 нечетных чисел

$$1 + 3 + 5 + \dots + 199 = 100^2 = 10\,000;$$

сумма первых 50 нечетных чисел

$$1 + 3 + 5 + \dots + 99 = 50^2 = 2500.$$

Мы могли бы получить только что найденное правило, используя правило, полученное в первой задаче.

Выполним по столбцам сложение суммы n первых чисел натурального ряда и суммы $(n - 1)$ первых чисел того же ряда:

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + (n - 1) + n \\ 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n - 2) + (n - 1). \end{array}$$

Получим:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1),$$

то есть:

сумма n первых нечетных чисел натурального ряда есть сумма суммы первых n и суммы первых $(n - 1)$ чисел натурального ряда. Так как сумма n

первых чисел натурального ряда есть $\frac{n(n+1)}{2}$, а

сумма $(n - 1)$ первых чисел того же ряда $\frac{(n-1)n}{2}$,

то сумма n первых **нечетных** чисел натурального ряда $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$ равна сумме

$$\begin{aligned} & (1 + 2 + 3 + \dots + n) + (1 + 2 + 3 + \dots + n - 1) = \\ & = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2 + n + n^2 - n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2; \end{aligned}$$

мы получили вновь правило:

сумма n первых нечетных чисел натурального ряда равна квадрату числа слагаемых n^2 .

3. Найти сумму квадратов первых n чисел натурального ряда

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2.$$

Нахождение этой суммы при помощи чертежа возможно, но сложнее, чем при помощи других рассуждений.

Составим прямоугольную числовую таблицу, в которой n строк и $(2n + 1)$ столбцов. В каждом столбце сверху вниз идут числа натурального ряда, начиная с единицы. Мы знаем, что сумма чисел каждого столбца

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Так как всех столбцов $2n + 1$, то сумма всех чисел приведенной таблицы

$$\frac{n(n+1)}{2} \cdot (2n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

$2n+1$ СТОЛБЕЦ

СТРОК

	$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$		$n-1$	
--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--	-------	--

В левой части под ломаной имеем, рассматривая числа по строкам:

$$\begin{array}{r}
 1 = 1^2 \\
 2 + 2 = 2^2 \\
 3 + 3 + 3 = 3^2 \\
 4 + 4 + 4 + 4 = 4^2 \\
 \dots \\
 \underbrace{n + n + \dots + n}_{n \text{ раз}} = n^2.
 \end{array}$$

Значит, числа левой части таблицы под ломаной дают в сумме

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

Такова же сумма чисел правой части таблицы под ломаной.

Найдем сумму чисел, стоящих над ломаной. Складываем их по ломаным I—I, II—II, III—III и так далее.

Имеем:

$$\begin{array}{ll}
 \text{в среднем столбце } 1 & \\
 \text{по ломаной I—I} & 1 + 2 + 1 \\
 \text{„ II—II} & 1 + 2 + 3 + 2 + 1 \\
 \text{„ III—III} & 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 \\
 \text{„ } \dots & \dots \\
 \text{„ } n-1 & 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n + \\
 & + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1.
 \end{array}$$

В задаче 2 мы установили, что

$$[1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n] + [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)] = n^2;$$

поэтому нашу предыдущую таблицу можно переписать так:

$$\begin{array}{ll}
 \text{в среднем столбце } 1^2 & \\
 \text{по ломаной I—I} & 2^2 \\
 \text{„ II—II} & 3^2 \\
 \text{„ III—III} & 4^2 \\
 \dots & \dots \\
 \text{по ломаной } n-1 & n^2.
 \end{array}$$

Итак, сумма всех чисел, стоящих над ломаной, равна

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

Оказывается, что в каждой из трех частей нашей таблицы суммы чисел одинаковые, именно:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

Выше мы нашли, что сумма всех чисел таблицы равна

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{2};$$

она же есть утроенная сумма $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$.
Значит,

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2},$$

$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Мы получили весьма часто используемую при изучении математики формулу для нахождения суммы квадратов любого числа n первых чисел натурального ряда.

Примеры:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2 = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = 338350;$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = 385.$$

Проверьте последнее равенство вычислением!

4. Найти сумму кубов первых n чисел натурального ряда

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3.$$

Напишем таблицу умножения, доведенную до $n \cdot n$ в виде квадратной числовой таблицы. Таким образом расположенную таблицу умножения часто называют *пифагоровой таблицей* (по имени упомянутого уже нами греческого математика Пифагора; VI век до нашего летосчисления), хотя давно уста-

новлено, что эта таблица к Пифагору никакого отношения не имеет.

Легко убедиться, что в каждом „наугольнике“ (на научном языке эти фигуры называются *гномо-*

1	2	3	4	5	6	7	$(n-1)$	n
2	4	6	8	10	12	14	$2(n-1)$	$2n$
3	6	9	12	15	18	21	$3(n-1)$	$3n$
4	8	12	16	20	24	28	$4(n-1)$	$4n$
5	10	15	20	25	30	35	$5(n-1)$	$5n$
6	12	18	24	30	36	42	$6(n-1)$	$6n$
7	14	21	28	35	42	49	$7(n-1)$	$7n$
..
$n-1$	$2(n-1)$	$3(n-1)$	$4(n-1)$	$5(n-1)$	$6(n-1)$	$7(n-1)$			$(n-1)^2$	$(n-1)n$
n	$2n$	$3n$	$4n$	$5n$	$6n$	$7n$			$n(n-1)$	$n \cdot n$

нами) нашей таблицы сумма чисел дает полный куб:

$$1 = 1^3$$

$$2 + 4 + 2 = 8 = 2^3$$

$$3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27 = 3^3$$

$$\begin{aligned}
 & n + 2n + 3n + \dots + (n-1)n + n \cdot n + (n-1)n + \\
 & \quad + (n-2)n + \dots + 3n + 2n + n = \\
 & = n \{ 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n + (n-1) + \\
 & \quad + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1 \} = \\
 & = n \{ [1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n] + [1 + 2 + 3 + \\
 & \quad + \dots + (n-1)] \} = n \cdot n^2 = n^3
 \end{aligned}$$

(выражение в фигурных скобках по доказанному в задаче 2, как сумма сумм натуральных чисел от 1 до n и от 1 до $n-1$, равна n^2).

Итак, сумма чисел нашей таблицы, вычисленная по наугольникам, равна

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3.$$

С другой стороны, складывая числа по строкам, имеем:

$$\begin{aligned} & (1 + 2 + 3 + \dots + n) + 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) + \\ & + 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + \dots + n(1 + 2 + 3 + \dots \\ & \dots + n) = (1 + 2 + 3 + \dots + n)(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \\ & = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2. \end{aligned}$$

Но мы видели (задача 1), что

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

следовательно,

$$\boxed{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2}$$

Сумма кубов n первых чисел натурального ряда равна квадрату суммы этих чисел.

$$\text{Примеры: } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3 = \left[\frac{100 \cdot 101}{2} \right]^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = \left[\frac{10 \cdot 11}{2} \right]^2 = 55^2 = 3025.$$

Проверьте последнее равенство!

Большинство выведенных нами формул относительно чисел натурального ряда были известны Пифагору, а некоторые еще ранее — вавилонским и египетским математикам, по крайней мере 4000 лет назад.

В более поздние времена были найдены формулы для сумм четвертых, пятых, шестых и дальнейших степеней n первых чисел натурального ряда. Отметим из них формулу:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{30} (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n),$$

которая была найдена узбекским математиком *Джемшидом бен Масуд эд-Дин ал-Каши* в XV веке в Самарканде. Имя этого математика заслуживает того, чтобы мы его помнили: он около 1425 года ввел в употребление десятичные дроби, — на 150 лет ра-

нее, чем это случилось в Западной Европе. Там эта заслуга до сих пор приписывается фламандскому инженеру Симону Стевину (1548—1620), имеющему немалые другие заслуги.

5. Одно свойство чисел натурального ряда

Имеются гири весом в 1, 2, 4, 8, 16 граммов. Можно ли при помощи их взвесить все грузы до $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$ грамма, кладя гири только на одну чашку весов?

Легко убедиться непосредственно, что это возможно. Проверьте!

Если прибавить гирю в 32 грамма, то, очевидно, можно взвесить все грузы до 63 граммов, добавляя к гире в 32 грамма число граммов от 1 до 31, которые возможно составить из первых 5 гирь.

Прибавляя далее гирю в 64 грамма, можно взвесить все грузы от 1 до 127 граммов.

В нашем расчете фигурируют гири весом в граммах:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,

или

1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 , 2^5 , 2^6 .

Если продолжить ряд степеней числа 2 дальше, то из этих степеней двойки и единицы *посредством сложения* можно составить все числа натурального ряда. *Каждое число ряда степеней двойки на единицу больше суммы всех предшествующих ей степеней двойки и единицы.*

Если имеются гири весом (в граммах)

1, 3, 9, 27, 81,

то наибольший груз, который при помощи их можно взвесить, равен

$1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121$ грамму.

Можно ли при помощи этих гирь взвесить все грузы от 1 грамма до 121 грамма? Это возможно, если класть гири на обе чашки весов; тогда вес груза равняется разности весов гирь на обеих чашках.



Легко проверить для первых трех гирь в 1, 3 и 9 граммов, что при помощи их можно взвесить все грузы от 1 грамма до $1 + 3 + 9 = 13$ граммов.

Обозначая гири, прикладываемые к грузу, вычитаемыми, имеем:

Груз в	1 грамм	отвешиваем первой гирей;
"	2 грамма:	3 грамма — 1 грамм;
"	3 грамма:	для него имеется вторая гиря;
"	4 грамма:	1 грамм + 3 грамма;
"	5 граммов:	гиря в 9 граммов — 1 грамм — 3 грамма;
"	6 граммов:	9 граммов — 3 грамма;
"	7 граммов:	9 граммов + 1 грамм — 3 грамма;
"	8 граммов:	9 граммов — 1 грамм;
"	10 граммов:	9 граммов + 1 грамм;
"	11 граммов:	9 граммов + 3 грамма — 1 грамм;
"	12 граммов:	9 граммов + 3 грамма;
"	13 граммов:	9 граммов + 3 грамма + 1 грамм.

Прибавив гирю в 27 граммов и соединяя ее вес с весами от 1 грамма до 13 граммов, можно получить все веса до 40 граммов.

Добавив гирю в 81 грамм, можно таким же образом взвесить все грузы до 121 грамма.

Итак, из чисел

$$1, 3, 9, 27, 81, 243$$

$$\text{или } 1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5$$

можно также, при продолжении ряда степеней тройки, при помощи сложения и вычитания получить все числа натурального ряда.

Возможность составлять при помощи сложения или сложения и вычитания все числа натурального ряда из степеней двойки или степеней тройки и единицы выражает два замечательных свойства натурального ряда. Они были использованы знаменитым нашим математиком *Леонардом Эйлером* (1707—1783) для нахождения самой удобной системы гирь.



Если иметь только один набор гирь и класть гири на обе чашки весов, то самой выгодной является система из гирь весом в 1, 3, 9, 27, 81 и так далее граммов.

Из этого примера мы видим, что свойства чисел и их последовательностей, кажущиеся отвлеченными и далекими от практических вопросов, могут быть использованы для решения задач повседневной жизни. Таких примеров можно привести много. Не нужно смущаться тем, что какая-нибудь теорема или какое-нибудь правило *пока еще* не имеет практического применения. Применение со временем найдется. Полезно помнить по этому поводу слова нашего крупнейшего инженера и замечательного математика, академика, Героя Социалистического Труда, Алексея Николаевича *Крылова* (1863—1945); он выразился так:

...Митрофанушка Простаков из „Недоросля“ когда-то говорил, что дверь, прилаженная к своему месту, есть имя прилагательное; та же, которая лежит в чулане, — имя существительное.

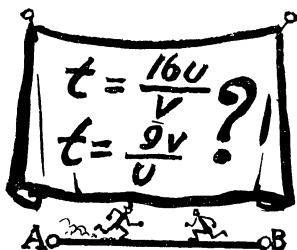
Математические теоремы и правила по их открытию являются „существительными“, они только существуют, часто не имея приложений. Рано или поздно, иногда после сотен и тысяч лет, эти математические существительные становятся „прилагательными“, находят применение в других науках, технике, искусстве...



А. Эйлер

РАССКАЗ ШЕСТОЙ

об уравнениях и решении задач при помощи их



В наших рассказах мы несколько раз касались вопроса об уравнениях. Мы знаем, что решение уравнения или систем уравнений делается по общим схемам и не представляет затруднений. Знаем мы также, что для составления уравнений по условию задачи никаких общих правил дать

нельзя, кроме неоднократно сделанного нами указания: надо думать!

Рассмотрим в настоящем рассказе, что произошло в одной школе с решением систем уравнений, и решим при помощи уравнений несколько задач.

СЛУЧАЙ В ШКОЛЕ

Для контрольной работы по алгебре в VII классе учительница дала каждому ученику особый вариант системы однотипных уравнений, именно:

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1) $2x + 3y = 4$ | 2) $3x + 4y = 5$ |
| $5x + 6y = 7$ | $6x + 7y = 8$ |
| 3) $3x + 5y = 7$ | 4) $4x + 7y = 10$ |
| $9x + 11y = 13$ | $13x + 16y = 19$ |
| 5) $4x + 9y = 14$ | |
| $19x + 24y = 29$ | и так далее. |

Учительница предупредила „Вы любите заглядывать в тетрадь соседа, сколько бы вам ни запрещать это. Вот я дала каждому свою особую систему, так что можете заглядывать сколько вам угодно“.

Ученики, решив каждый свою систему уравнений, не замедлили воспользоваться правом заглянуть в тетрадь соседа, и сразу поднялось несколько рук.

— Мария Ивановна, что же это такое?

— Что?

— Ответы получаются одинаковые.

Действительно, хотя системы уравнений все различные, но, к удивлению учащихся, у всех получился один и тот же ответ:

$$x = -1$$

$$y = 2.$$

Как это возможно?

Р е ш е н и е

Все указанные системы уравнений имеют общим правило составления их коэффициентов: каждый следующий коэффициент в системе, считая и правые части уравнения, получается из предыдущего коэффициента прибавлением одного и того же числа: в первых двух заданиях прибавляется по единице, в третьем — по 2, в четвертом — по 3, в пятом — по 5 и так далее (в IX классе вы узнаете, что образуемая таким образом последовательность чисел называется арифметической прогрессией).

Докажем, что все системы уравнений с коэффициентами, по такому правилу составляемые, при любом первом коэффициенте и при любом прибавляемом постоянном для данной системы числе имеют решением

$$x = -1, y = 2.$$

Для этого возьмем подобную систему с *буквенными коэффициентами*:

$$\begin{aligned} ax + (a + n)y &= a + 2n \\ (a + 3n)x + (a + 4n)y &= a + 5n. \end{aligned}$$

Вычитывая почленно первое уравнение из второго, получаем уравнение:

$$3nx + 3ny = 3n,$$

или

$$x + y = 1.$$

Из этого уравнения имеем $x = 1 - y$. Подставляя это значение в первое данное уравнение, получаем

$$y = 2$$

и, значит,

$$x = 1 - 2 = -1.$$

Итак, все системы двух уравнений с двумя неизвестными, у которых коэффициенты составлены по указанному выше правилу, имеют одно и то же решение:

$$x = -1, y = 2.$$

Существует система двух уравнений с двумя неизвестными более общего вида, имеющая то же решение:

$$x = -1 \text{ и } y = 2.$$

Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} ax + (a + k)y &= a + 2k \\ bx + (b + m)y &= b + 2m. \end{aligned}$$

Предполагаем в ней $a \neq b, k \neq m$.

Вычитая почленно второе уравнение из первого, получаем уравнение:

$$(a - b)x + (a - b)y + (k - m)y = a - b + 2(k - m).$$

Это уравнение можно заменить системой двух уравнений:

$$\begin{aligned} (a - b)x + (a - b)y &= a - b \\ (k - m)y &= 2(k - m), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y &= 2, \end{aligned}$$

откуда

$$x = -1, y = 2.$$

Изучение систем уравнений рассмотренных типов интересно в том отношении, что показывает пользу решения уравнений и систем их с буквенными коэф-

фициентами. Этот вопрос допускает дальнейшие обобщения, из которых здесь укажем только одно.

Свойство иметь одно и то же решение не распространяется на системы уравнений с более чем двумя неизвестными, хотя коэффициенты уравнений и составляются по тому же правилу, как в приведенных выше системах уравнений с двумя неизвестными.

Рассмотрим пример системы:

$$\begin{aligned} ax + (a + n)y + (a + 2n)z &= a + 3n \\ (a + 4n)x + (a + 5n)y + (a + 6n)z &= a + 7n \\ (a + 8n)x + (a + 9n)y + (a + 10n)z &= a + 11n. \end{aligned}$$

Вычитая почленно первое уравнение из второго, получаем:

$$4nx + 4ny + 4nz = 4n,$$

или

$$x + y + z = 1.$$

Таким же образом, вычитая почленно второе уравнение из третьего, имеем:

$$4nx + 4ny + 4nz = 4n,$$

или

$$x + y + z = 1.$$

Умножив все члены этого уравнения на a , имеем

$$ax + ay + az = a.$$

Вычитая это уравнение почленно из первого уравнения данной системы, получаем:

$$ny + 2nz = 3n,$$

или

$$y + 2z = 3.$$

Таким образом, данная система трех уравнений оказывается равносильной системе двух уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ y + 2z &= 3, \end{aligned}$$

системою, имеющею бесконечно много решений.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПРИ ПОМОЩИ УРАВНЕНИЙ

Решим при помощи уравнений несколько задач, начиная с той задачи Л. Н. Толстого о косцах, которую мы решали уже при помощи чертежа.

Задача Л. Н. Толстого

„Артели косцов надо было скосить два луга, один вдвое больше другого. Половину дня артель косила большой луг, после чего одна половина осталась на большом лугу и докосила его к вечеру; вторая же половина косила второй луг, где к вечеру остался участок, который мог быть скошен одним косцом за день.

Сколько косцов было в артели?”

Решение

Пусть число косцов будет x .

Оба луга были скошены при работе всей артели в течение дня и еще одного косца в течение второго дня. Чтобы скосить оба луга, потребовался одному косцу $x + 1$ рабочий день. Чтобы скосить малый луг, составляющий $\frac{1}{3}$ обоих лугов, требуется $\frac{x+1}{3}$ рабочих дней. С другой стороны, для того, чтобы скосить малый луг, половина артели работала половину дня (то есть $\frac{x}{2}$ косцов $\frac{1}{2}$ дня), иными словами, требовалась работа за $\frac{x}{4}$ рабочих дня и одного косца за целый день, так что всего косьба малого луга потребовала $\left(\frac{x}{4} + 1\right)$ рабочих дней. Значит,

$$\frac{x+1}{3} = \frac{x}{4} + 1,$$

$$x + 4 = 12,$$

$$x = 8.$$

ВТОРОЙ СПОСОБ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ

Установив, что косьба обоих лугов потребовала $x + 1$ рабочих дней, мы можем найти два выражения для числа дней работы на большом лугу и, приравняв

эти выражения, получить уравнение для определения x .

Так как большой луг составляет $\frac{2}{3}$ обоих лугов, то его можно было косить в

$$\frac{2(x+1)}{3} \text{ дней.}$$

Косила же его вся артель $\frac{1}{2}$ дня, что дает $\frac{x}{2}$ рабочих дней, и половина артели $\frac{1}{2}$ дня, что дает еще $\frac{x}{4}$ рабочих дней; всего для того, чтобы косить большой луг, потребовалась $\frac{x}{2} + \frac{x}{4}$ рабочих дней. Имеем уравнение:

$$\frac{2}{3}(x+1) = \frac{x}{2} + \frac{x}{4},$$

откуда

$$x = 8.$$

ТРЕТИЙ СПОСОБ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЯ

Чтобы косить малый луг, потребовалось $\frac{x}{4} + 1$ рабочих дней косца; для большого луга это число было $\frac{x}{2} + \frac{x}{4}$. Малый луг в два раза меньше большого; таково же будет и отношение чисел рабочих дней.

$$\left(\frac{x}{4} + 1\right) : \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{4}\right) = 1 : 2;$$

$$2\left(\frac{x}{4} + 1\right) = \frac{x}{2} + \frac{x}{4},$$

$$\frac{x}{2} + 2 = \frac{x}{2} + \frac{x}{4},$$

$$\frac{x}{4} = 2,$$

$$x = 8.$$

РЕШЕНИЕ ПРИ ПОМОЩИ ВВЕДЕНИЯ НОВОЙ НЕИЗВЕСТНОЙ

Нередко при решении задач при помощи уравнений бывает полезно введение новой неизвестной, значения которой по смыслу задачи находить не нужно, но которая облегчает составление уравнения.

Обозначим по-прежнему число косцов через x . Обозначим буквой y величину участка, скашиваемого одним косцом за день.

На большом лугу косили x косцов $\frac{1}{2}$ дня и $\frac{x}{2}$ косцов $\frac{1}{2}$ дня; величина большого луга

$$y \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{4} \right), \text{ или } \frac{3xy}{4}.$$

На малом лугу косили $\frac{x}{2}$ косцов $\frac{1}{2}$ дня и один косец целый день; величина малого луга

$$\frac{xy}{4} + y, \text{ или } \frac{xy + 4y}{4}.$$

Так как большой луг в два раза больше малого, то

$$\frac{3xy}{4} : \frac{xy + 4y}{4} = 2,$$

$$\frac{3x}{x + 4} = 2,$$

$$x = 8.$$

ЗАДАЧА НЬЮТОНА

Введением вспомогательной неизвестной решается задача, получившая название „задачи Ньютона“.

„Три луга, покрытые травой одинаковой густоты и одинаковой скорости роста, имеют площади: $3\frac{1}{3}$, 10 и 24 акров (1 акр равен 0,405 гектара). Первый прокормил 12 быков в продолжение 4 недель, второй — 21 быка в течение 9 недель. Сколько быков может прокормить третий луг в течение 18 недель?“

Решение

Берем за вспомогательную неизвестную y долю первоначального запаса травы, прирастающей на 1 акре в течение недели. На первом лугу за неделю прирост травы будет $3\frac{1}{3}y$, а в течение 4 недель $3\frac{1}{3}y \cdot 4 = \frac{40}{3}y$ того количества травы, которое было на нем первоначально. Так как y есть прирост травы на 1 акре, то общее количество травы — первоначальной и прироста — таково, каково оно было бы на



И. Ньютон

$$3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y \text{ акров.}$$

Значит, 12 быков за 4 недели съели траву с площади $3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y$ акров, один бык в одну неделю поел $\frac{1}{48}$ часть, то есть траву с

$$\left(3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y\right) : 48 = \frac{10 + 40y}{144} \text{ акров.}$$

Для такого же расчета относительно второго луга имеем:

за неделю прирост травы на 1 акр $= y$,
за 9 недель прирост травы на 1 акр $= 9y$,
за 9 недель прирост травы на 10 акрах $= 90y$.

Запас травы на втором лугу и ее прирост за 9 недель равен количеству травы на площади

$$10 + 90y \text{ акров.}$$

Эту траву съедает 21 бык в течение 9 недель; один бык в одну неделю съедает траву с

$$\frac{10 + 90y}{9 \cdot 21} = \frac{10 + 90y}{189} \text{ акров.}$$

Так как потребление травы y всех быков считается одинаковым, то последнее число должно равняться полученному при таких же расчетах на первом лугу:

$$\frac{10 + 40y}{144} = \frac{10 + 90y}{189}.$$

Отсюда находим $y = \frac{1}{12}$.

Зная y , можем определить площадь луга, наличный запас травы которого может прокормить одного быка в течение недели, то есть найдем численную величину

$$\frac{10 + 40y}{144} \text{ при } y = \frac{1}{12},$$

$$\frac{10 + 40 \cdot \frac{1}{12}}{144} = \frac{5}{54} \text{ акра.}$$

Третий луг в 24 акра кормит x быков в течение 18 недель, для чего требуется $\frac{5 \cdot 18 \cdot x}{54} = \frac{5}{3} x$ акров луга. Прирост травы равен запасу с $24 \cdot 18 \cdot \frac{1}{12} = 36$ акров, и вся съеденная за 18 недель трава равна запасу травы $24 + 36 = 60$ акров;

$$\frac{5}{3} x = 60,$$

$$x = 36.$$

Третий луг может прокормить в течение 18 недель 36 быков.

Примечание. Прообразом задач приведенного вида является древняя задача, известная под названием: „Задача о быках солнца“, приписываемая величайшему математику всех времен *Архимеду* (287—212 до начала нашего летосчисления). Задача эта, изложенная в 44 стихах, содержит 8 неизвестных, которые все выражаются через одну. Для нахождения значения последней нужно найти целые положительные значения корней уравнения

$$x^2 - 4\,729\,494\,y^2 = 1.^1$$

¹ Число $4\,729\,494 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353$.



Уравнение вида $x^2 - Ky^2 = 1$, в котором положительное целое число K не есть точный квадрат, *Леонардом Эйлером* было названо *уравнением Пелля*.

Европейскими математиками XVII и XVIII веков было доказано, что если коэффициент при y^2 в уравнении $x^2 - Ky^2 = 1$ не является точным квадратом, то всегда существует бесконечно много целых положительных значений для x и y , удовлетворяющих этому уравнению (или, как говорят, существует бесконечно много целых положительных решений этого уравнения). Был найден закон, по которому из наименьшего решения уравнения Пелля составляются все остальные его значения, потому важным является нахождение наименьшего положительного решения уравнения. Способ решения уравнения Пелля дается в той части математики, которая называется теорией чисел или высшей арифметикой.

Уравнение о быках солнца имеет такое наименьшее решение:

$$\begin{aligned} y &= 50\,549\,485\,234\,033\,074\,477\,819\,735\,540\,408\,986\,340, \\ x &= 109\,931\,986\,732\,829\,734\,979\,866\,232\,821\,433\,543 \\ &\quad 901\,088\,049. \end{aligned}$$

Эти числа являются наибольшими значениями, которые когда-либо получало неизвестное при решении уравнения, имеющего определенное содержание.

Когда европейцы в начале XIX века познакомились с математическими знаниями Индии, то обнаружилось, что индийские ученые уже в VII веке решали уравнения, получившие у нас название уравнений Пелля, причем решали их в общем тем же способом, как это делаем мы. Эти уравнения имеют применение в астрономии.

ЗАДАЧА КЕРРОЛЛА

Курьеры из мест A и B двигаются, каждый равномерно, но с разными скоростями, друг другу навстречу. После встречи для прибытия к месту назначения одному нужно было еще 16, а другому — 9 часов.



Сколько времени требуется тому и другому для прохождения всего пути между A и B ?

Решение

Обозначим скорости курьеров через u и v , а время от начала движения до встречи курьеров через t .

Первому курьеру для прохождения всего пути нужно $t+16$ часов, второму $t+9$. Расстояние между точками A и B можно выразить тремя различными способами:

$$(t+16)u, (t+9)v \text{ и } t(u+v).$$

Имеем равенства:

$$(t+16)u = t(u+v) \text{ или } 16u = tv \text{ или } t = \frac{16u}{v},$$
$$(t+9)v = t(u+v) \text{ или } 9v = tu \text{ или } t = \frac{9v}{u}.$$

Отсюда

$$16 \frac{u}{v} = 9 \frac{v}{u}, \frac{u^2}{v^2} = \frac{9}{16}, \frac{u}{v} = \frac{3}{4}.$$

Подставив найденное значение в первое выражение для t , имеем

$$t = \frac{16 \cdot 3}{4} = 12.$$

Первому курьеру для прохождения всего расстояния необходимо $12+16=28$ часов, второму $12+9=21$ час.

Проверьте ответ по условию задачи.

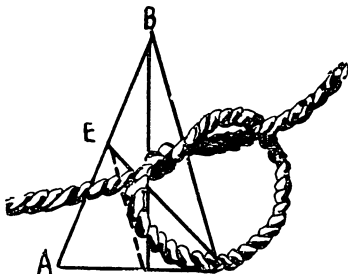
РАССКАЗ СЕДЬМОЙ

о том, как задача, не имеющая отношения к геометрии, разъяснила способ решения геометрических задач на построение

СЛУЧАЙ В КЛАССЕ ВЗРОСЛЫХ

Автор книги преподавал взрослым людям начала геометрии. Нужно было разъяснить классу способ решения задач на построение.

Учебник рекомендует поступать так: предполагаем, что задача решена, что требуемое построение выполнено, и посмотрим, как от построенной фигуры прийти к данным задачи, чтобы затем обратным переходом прийти от данных задачи к требуемой фигуре.

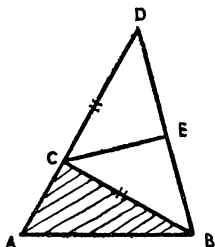


Простой пример

Нужно построить треугольник по основанию, углу при основании и сумме двух других сторон.

Предполагаем, что задача решена, то есть, что мы получили треугольник ABC , имеющий данное основание $AB = a$, данный угол при основании $CAB = \alpha$, и известна сумма сторон $AC + CB = l$. Если продолжить AC за точку C на расстояние CB , то имеем $AD = l$. Фигуру DAB можно построить по данным задачи. Остается найти такую точку C на AD , чтобы $DC = CB$. Соединив точки D и B прямой

и предполагая, что точка C найдена, получим равнобедренный треугольник BDC . Зная, что во всяком равнобедренном треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины, делит основание пополам, мы из точки E , середины отрезка BD , восстановим перпендикуляр. Пересечение его с отрезком AD и даст нам точку C . Требуемый треугольник построен.

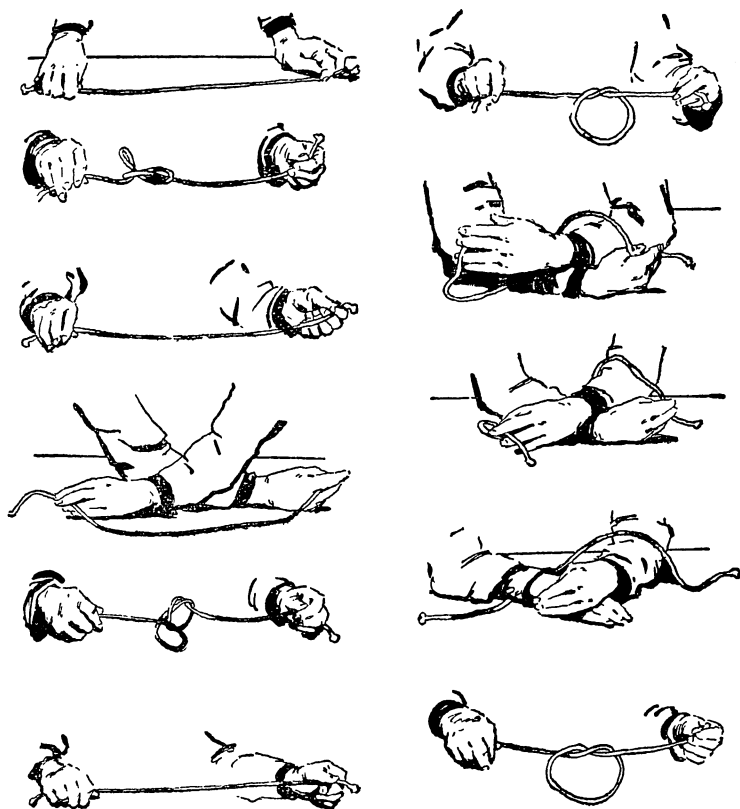


Ни объяснение, ни примеры не убедили класс в том, что такой способ решения задач имеет какое-либо значение. Учащиеся указывали, что предлагаемый способ решения, переведенный на житейский язык, означает следующее: мне нужно добыть 1000 рублей. Для этого мне предлагают предполагать, что 1000 рублей как-то добыты (предполагать, что задача решена), а затем подумать, как эту сумму добыть. По мнению учащихся, предположение о том, что задача решена, никакого облегчения для поисков решения не дает, и что для каждой задачи нужно просто догадаться, как построить требуемую фигуру. Для разъяснения смысла способа решения и для убеждения учащихся в пользе его, преподаватель предложил решать следующую задачу.

ЗАДАЧА О ЗАВЯЗЫВАНИИ УЗЛА

На столе лежит кусок веревки, вытянутый по прямой. Надо взять его одной рукой за один, другой рукой за другой конец и, не выпуская концов веревки из рук, завязать узел.

Сразу нашлись охотники выполнить это. Когда брали левой рукой за левый конец веревки, правой рукой за правый конец, узла завязать не удалось. Также не удалось завязать узел, когда правой рукой брали за левый конец веревки и левой рукой за правый конец.



После ряда попыток задача была классом признана невозможной.

Тогда классу было предложено попробовать решить ее рекомендуемым в геометрии способом.

Предположим, что задача решена, то есть, что узел на веревке имеется и концы веревки находятся в руках и не выпускаются. Попробуем от решенной задачи вернуться к ее данным, что веревка лежит, вытянутая на столе, и концы ее не выпускаются из рук. Если выправить веревку, не выпуская концов ее из рук, то оказывается, что левая рука, идя под вытянутой веревкой и над правой рукой, держит правый конец веревки; правая рука, идя над веревкой и под левой рукой, держит левый конец веревки.

После этого решение задачи легко выполнимо: веревка лежит на столе; положив правую руку на веревку, берем ею за левый конец веревки; левую руку засовываем под веревку и над правой рукой берем за правый конец веревки. Не выпуская концов веревки из рук, разведем руки. На веревке оказался узел, завязанный при выполнении всех условий задачи.

Эта задача, которая как будто не имеет никакого отношения к способу решения геометрических задач на построение, убедила учащихся, что предлагаемый учебником геометрии способ решения этих задач действительно помогает найти решение.

Способ решения геометрических задач на построение, исходящий из предположения о том, что задача решена, приписывается древнегреческому философу Платону, жившему в V веке до начала нашего летосчисления, то есть почти две с половиною тысячи лет назад.

Решение задачи-фокуса о завязывании узла совершенно точно соответствует смыслу указанного способа решения геометрических задач на построение.

Решите указанным способом следующие задачи.

Задача 1

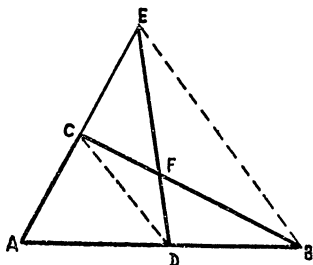
Преобразовать данный треугольник ABC в равновеликий ему, с другим основанием AD и с тем же углом A при основании.

Решение

Пусть дан треугольник ABC . Предположим, что равновеликий с ним будет ADE .

Соединим точку E с точкой B и точку C с точкой D .

Вопрос задачи сводится к нахождению точки E . Она была бы найдена, если бы можно было установить, что $BE \parallel CD$, так как достаточно было бы провести из точки B прямую, параллельную отрезку CD , который известен.



Предположив, что треугольники ABC и ADE равновелики, мы этим предполагаем, что треугольники DBF и CFE равновелики, так как они, прибавленные к четырехугольнику $ADFC$, дают равновеликие треугольники ABC и ADE . Итак,

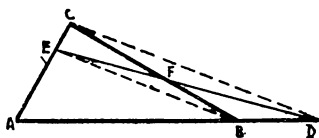
$$\text{пл. } \triangle DBF = \text{пл. } \triangle CFE.$$

Эти равновеликие треугольники после присоединения к каждому из них в отдельности треугольника BEF дают равновеликие треугольники DBE и CBE . У последних основание общее BE . Так как площади их равны, то и высоты этих треугольников равны. Вершины треугольников лежат на прямой DC , следовательно, $DC \parallel BE$.

Теперь решение задачи понятно: имеем треугольник ABC ; дан конец нового основания D ; соединим точку D с точкой C ; продолжим сторону AC за точку C ; из точки B проводим линию параллельно DC ; точка пересечения его с продолжением стороны треугольника AC , точка E , будет искомой вершиной треугольника ADE , равновеликого данному ABC .

Задача всегда возможна и имеет единственное решение.

Усвоив решение задачи по первому чертежу, в случае, когда основание искомого треугольника AD меньше основания данного треугольника AB , выпол-



ните, не заглядывая в книгу, построение для того случая, когда основание искомого треугольника AD больше, чем основание данного треугольника AB (второй чертеж).

Задача 2

Даны: угол ABC и точка D на плоскости угла. Требуется провести через точку D прямую, отсекающую от угла ABC треугольник, периметр которого имеет данную длину $2p$.

Решение

Предположим, что задача решена, что треугольник BEF искомый, в котором продолжение стороны EF проходит через точку D и периметр которого равен данному числу $2p$, то есть

$$BE + EF + FB = 2p.$$

Проведем окружность, касательную к EA , EF и FC (она называется вневписанной окружностью треугольника BEF). Такая окружность единственная; центр ее находится в точке пересечения бисекторов углов CFE и FEA . Пусть точками касания окружности с данными прямыми будут K , L и M . Так как $FL = FM$ и $EM = EK$ (свойство отрезков касательных, проведенных из данной точки к данной окружности), то

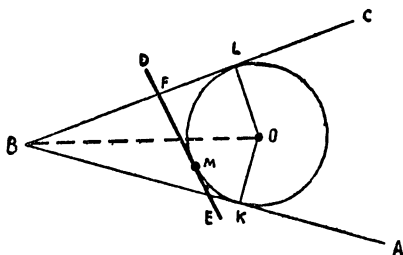
$$\begin{aligned} BE + EF + FB &= BE + EM + MF + FB = \\ &= BE + EK + FL + FB = BK + BL = 2p. \end{aligned}$$

Треугольники BOL и BKO равны, поэтому $BK = BL = p$. Решение задачи свелось к проведению

окружности, касающейся сторон данного угла в точках K и L ($BK = BL = p$), и проведению из точки D касательной к построенной окружности.

Построение

Отложим на сторонах данного угла отрезки $BK = BL = p$ и из точек K и L восставим перпендику-



ляры KO и LO , пересекающиеся в точке O . Из точки O радиусом OK или OL проведем окружность и из точки D касательную к меньшей части этой окружности.

Задача имеет одно решение, если точка D находится вне данного угла и вне угла, вертикального данному, или на отрезках BL или BK , или на меньшей дуге, исключая точек B, K, L . Задача имеет два решения, если точка D находится внутри фигуры, ограниченной отрезками BK, BL и меньшей дугой. В остальных случаях задача решения не имеет.

Сделайте построение для всех перечисленных случаев.

Примечание. Задача эта принадлежит математику С. Люлье (S. Lhuillier, 1750—1840), работавшему в Варшаве в начале XIX века. Имя Люлье носят несколько найденных им формул тригонометрии и геометрии. Среди последних формула

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3},$$

в которой r есть радиус вписанной в треугольник окружности, r_1, r_2, r_3 — радиусы трех внеписанных окружностей того же треугольника.

Задача 3

Прием решения, который показан в предыдущих задачах и который состоит в том, что задача предполагается решенной и из этого исходят в поисках решения, широко применяется в геометрических задачах на построение. Но он не является приемом решения только геометрических задач, как это обычно думают учащиеся.

Решение задач при помощи уравнений по существу применяет то же рассуждение: мы предполагаем, что требуемый задачей ответ существует, обозначаем его через x или y , устанавливаем зависимость между искомым числом и данными задачи (составляем уравнение или уравнения) и, решая уравнения, вычисляем x , то есть переходим от данных в задаче чисел к искомым.

Покажем на следующем примере, что этот прием бывает полезен и при решении арифметических вопросов.

Доказать, что куб всякого натурального числа есть разность квадратов двух натуральных чисел (прибавляя к последним и 0)

$$1^3 = 1 = 1^2 - 0^2$$

$$2^3 = 8 = 3^2 - 1^2$$

$$3^3 = 27 = 6^2 - 3^2$$

$$4^3 = 64 = 10^2 - 6^2$$

Доказательство 1

Для любого натурального числа n имеем:

$$\left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n^2-n}{2}\right)^2 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} - \frac{n^4-2n^3+n^2}{4} = n^3.$$

Примечание. Доказательство очень просто убеждает нас, что куб всякого натурального числа n есть разность квадратов двух натуральных чисел, которыми являются $\frac{n^2+n}{2}$ и $\frac{n^2-n}{2}$.

Так, например,

$$\begin{aligned} 11^3 = 1331 &= \left[\frac{11^2+11}{2}\right]^2 - \left[\frac{11^2-11}{2}\right]^2 = \\ &= 66^2 - 55^2 = 1331. \end{aligned}$$

Но для доказательства нужно было догадаться взять числа $\frac{n^2+n}{2}$ и $\frac{n^2-n}{2}$ и проверить, что разность их квадратов есть n^3 . Нельзя ли каким-нибудь рассуждением прийти к заключению, что именно числа $\frac{n^2+n}{2}$ и $\frac{n^2-n}{2}$ годятся для нашей цели?

Доказательство 2

Можно рассуждать так.

Предположим, что куб числа n есть разность квадратов двух чисел x и y :

$$n^3 = x^2 - y^2.$$

Разложив правую часть равенства на множители, имеем:

$$n^3 = (x - y)(x + y).$$

Этому равенству, которое можно записать в виде

$$n \cdot n^2 = (x - y)(x + y),$$

можно удовлетворить, предполагая

$$\begin{aligned} n &= x - y, \\ n^2 &= x + y. \end{aligned}$$

Считая n данным, решим относительно x и y систему уравнений:

$$\begin{aligned} x + y &= n^2, \\ x - y &= n. \end{aligned}$$

Складывая почленно уравнения, имеем

$$x = \frac{n^2 + n}{2},$$

вычитая уравнения почленно, получаем

$$y = \frac{n^2 - n}{2}$$

и

$$n^3 = \left(\frac{n^2 + n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n^2 - n}{2}\right)^2.$$

$\frac{n^2+n}{2}$ и $\frac{n^2-n}{2}$ всегда будут целыми числами: если n четное, то и n^2 четное и числители обеих дробей четные; если n нечетное число, то квадрат его также является нечетным числом, а сумма и разность двух нечетных чисел всегда являются четными числами.

Доказательство 1 есть пример *синтетического*, доказательство 2 — *аналитического* доказательства.

Примечание. Можно доказать, что из тех двух квадратов x^2 и y^2 , разности которых равняется n^3 , по крайней мере один (или x^2 или y^2) делится на 9.

Доказательство

Мы нашли, что

$$x = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$y = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Число n может быть:

1) или кратное 3, то есть $n = 3k$,

2) или при делении на 3 дать остаток 1, так что $n = 3k + 1$,

3) или при делении на 3 дать остаток 2, так что $n = 3k + 2 = 3(k+1) - 1 = 3l - 1$, где k и l натуральные числа.

1) Если $n = 3k$, то $x^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{9k^2(3k+1)^2}{4}$,

$$y^2 = \frac{n^2(n-1)^2}{4} = \frac{9k^2(3k-1)^2}{4},$$

x^2 и y^2 делятся на 9;

2) если $n = 3k + 1$, то $y^2 = \frac{(3k+1)^2(3k+1-1)^2}{4} =$
 $= \frac{(3k+1)^2 9k^2}{4}$ и делится на 9;

3) если $n = 3l - 1$, то $x^2 = \frac{(3l-1)^2(3l-1+1)^2}{4} =$
 $= \frac{(3l-1)^2 9l^2}{4}$ и делится на 9.

Наше утверждение, что или x^2 , или y , или оба они делятся на 9, доказано.

РАССКАЗ ВОСЬМОЙ

о том, что иногда ученик V класса лучше, чем ученик X класса, может решить задачу

ЗАДАЧА О ПЯТИ ШАПКАХ

Пять мальчиков обменялись своими шапками так, что у каждого была надета чужая шапка.

Сколькими способами можно обменяться?

Примечание. Эту задачу можно решить при помощи теории соединений, которая изучается в X классе. Однако ее можно решить и при помощи простых арифметических рассуждений, и притом не одним только способом. Арифметическое решение ее и гораздо проще, и гораздо красивее.

Решив задачу для пяти шапок, дайте решение задачи в общем виде для n шапок.



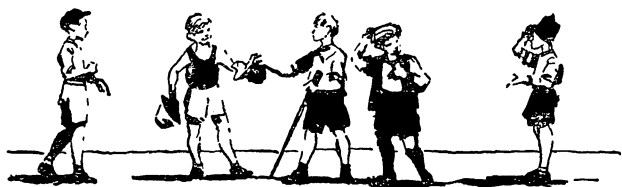
Решение арифметическое

Обозначим число способов, сколькими n мальчиков могут обменять свои шапки так, что у каждого будет надета чужая шапка, символом x_n .

В случае 4 мальчиков это число способов будет x_4 , в случае 5 мальчиков — x_5 и так далее.

Легко непосредственно подсчитать x_1 , x_2 , x_3 , x_4 .

Очевидно, что $x_2 = 1$, так как два мальчика могут только одним способом обменять свои шапки.



Для вычисления x_3 и x_4 обозначим номера мальчиков латинскими цифрами I, II, III... их шапки соответственными индийскими цифрами 1, 2, 3...

Пусть имеем трех мальчиков — I, II, III. Шапки их обозначим соответственно 1, 2, 3. Возможны только следующие 2 распределения шапок при выполнении условия, что у каждого мальчика будет надета чужая шапка:

I	II	III	— мальчики;
2	3	1	} распределения шапок при условии, чтобы у каждого была надета чужая.
3	1	2	

Итак,

$$x_3 = 2.$$

Пусть имеем четырех мальчиков — I, II, III, IV и их шапки — 1, 2, 3, 4.

I	II	III	IV	— мальчики;
2	3	4	1	} распределения шапок при условии, чтобы у каждого была надета чужая.
2	4	1	3	
2	1	4	3	
3	1	4	2	
3	4	2	1	
3	4	1	2	
4	1	2	3	
4	3	2	1	
4	3	1	2	

Это единственные возможные случаи распределения шапок так, чтобы у каждого была надета чужая шапка.

Итак,

$$x_4 = 9.$$

Мы пока что знаем, что

$x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 9$

Подсчитать непосредственно x_5 будет уже сложнее.

Если бы мы знали формулу, которая связывает x_5 со значениями x_4, x_3, x_2 , то могли бы найти x_5 без непосредственного подсчета возможных случаев. Словом, возникает вопрос о нахождении формулы, выражающей x_5 через значения x при индексе (значке при x), меньшем 5, и далее общий вопрос о нахождении формулы, связывающей x_n со значениями x при индексе, меньшем n , то есть о формуле, связывающей x_n с числами x_{n-1}, x_{n-2} и так далее.

Способ решения задач, заключающийся в том, что задача о некотором числе n предметов сводится к той же задаче относительно меньшего числа предметов, применяется в математике часто.

Этот способ (или метод) называется возвратным или *рекуррентным*. Нам и предстоит найти для нашей задачи *рекуррентную формулу*, то есть формулу, которая выражает число x_n через x_{n-1}, x_{n-2} и так далее.

Найдем сначала выражение x_5 через x_4, x_3 . Наше рассуждение, примененное к x_5 , остается тем же, если взять x с любым индексом n ; в общем случае мы можем о числе x_n говорить то же, что было сказано о числе x_5 .

Вывод рекуррентной формулы

Предположим, что четыре шапки — 1, 2, 3, 4 — распределены между четырьмя мальчиками — I, II, III, IV — *всеми возможными способами* распределения их. Эти способы нетрудно перечислить.

I	II	III	IV	— мальчики;
1	2	3	4	— у каждого надета своя шапка;
1	3	4	2	} у первого своя шапка, у остальных чужие;
1	4	2	3	
3	2	4	1	} у второго своя шапка, у остальных чужие;
4	2	1	3	
2	4	3	1	} у третьего своя шапка, у остальных чужие;
4	1	3	2	
2	3	1	4	} у четвертого своя шапка, у остальных чужие;
3	1	2	4	

1	2	4	3	}	у двух мальчиков надеты свои шапки, у остальных чужие;
1	4	3	2		
1	3	2	4		
4	2	3	1		
3	2	1	4		
2	1	3	4	}	
2	3	4	1		
2	4	1	3		
2	1	4	3		
3	1	4	2		
3	4	2	1	}	у всех мальчиков надеты чужие шапки (эти случаи были подсчитаны выше).
3	4	1	2		
4	1	2	3		
4	3	2	1		
4	3	1	2		

Итак, четыре шапки четырьмя мальчиками могут быть распределены между собою вообще двадцатью четырьмя различными способами, среди которых имеется 9 случаев таких, что у каждого мальчика надета чужая шапка, 8 случаев таких, что только у одного мальчика надета своя, у других — чужие шапки, 6 случаев таких, что у двух мальчиков надеты свои шапки, и 1 случай, когда у всех мальчиков надеты свои шапки. Отметим, что не может быть случаев, в которых *только* у троих из мальчиков надеты свои шапки, так как в таком случае и у четвертого мальчика обязательно будет надета также своя шапка.¹

[В каждом из 24 случаев четыре номера шапок (1, 2, 3, 4) стоят в отличном от других случаев порядке. Никакого иного распределения номеров четырех шапок — 1, 2, 3, 4, — отличного от приведенных в нашей таблице 24 случаев, найти не удастся (проверьте это утверждение!) Иными словами, из четырех чисел (1, 2, 3, 4) сделаны всевозможные *перестановки*, как говорят в математике. Вместо чисел можно было взять четыре каких-нибудь различных предмета, знака, одним словом, — четыре каких-нибудь *элементов*. Число всех возможных

¹ Отрывок, заключенный в квадратные скобки, для решения нашей задачи не является необходимым и помещается здесь лишь для интересующихся. Он может при чтении быть опущен.

перестановок из n элементов обозначается символом P_n . В предыдущем рассуждении мы нашли, что $P_4 = 24$. Проверка показывает, что $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Таким образом имеем

$$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4.$$

В математике условились произведение всех натуральных чисел от 1 до n , то есть $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) n$, обозначать сокращенно символом $n!$, называемым *факториалом n* . Согласно этому условию, имеем

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) n$$

и

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

В курсе X класса доказывается, что число перестановок из n элементов при всяком n равно факториалу числа n , то есть, что

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) n.$$

Как указано выше, для решения нашей задачи, то есть для нахождения рекуррентной формулы, связывающей x_5 с x_4 , x_3 и вообще x_n с x_{n-1} , x_{n-2} , ни понятие о числе перестановок, ни понятие факториала не нужны, а сама формула, как мы сейчас покажем, может быть найдена простыми рассуждениями.]

Итак, стоит вопрос: если число способов, сколькими 4 мальчика (в общем случае n мальчиков) могут распределить между собою шапки так, чтобы у каждого была надета чужая шапка, обозначить символом x_4 (в общем случае x_n), то нельзя ли выразить число x_5 (в общем случае x_{n+1}), через x_4 , x_3 (в общем случае через x_n , x_{n-1})?

Для всех возможных распределений между мальчиками 4 шапок мы имели таблицу 24 случаев на странице 81—82.

Пусть к четырем мальчикам присоединяется пятый (V) со своей шапкою (5). Как составить для пяти мальчиков все возможные случаи распределения шапок при выполнении условия, чтобы у каждого была надета чужая шапка?

В таблице содержатся $x_4 = 9$ перестановок четырех шапок при выполнении условия, что у каждого маль-

чика надета чужая шапка. Пятый мальчик, присоединившись к прежним четырем, может обменять свою шапку с каждым из первых четырех мальчиков. При этом получают такие группы по пяти мальчиков, что у каждого из пяти мальчиков будет надета чужая шапка. Из каждого из девяти таких распределений для четырех мальчиков получится четыре распределения пяти шапок между пятью мальчиками, притом таких, что у каждого мальчика будет надета чужая шапка.

Так, например, распределение шапок:

I	II	III	IV	мальчики,
2	3	4	1	шапки,

дает следующие четыре распределения пяти шапок пяти мальчиков:

I	II	III	IV	V	— мальчики;
5	3	4	1	2	} распределения шапок.
2	5	4	1	3	
2	3	5	1	4	
2	3	4	5	1	

Во всех этих случаях у каждого из мальчиков надета чужая шапка. Таким же образом каждое из девяти распределений шапок четырех мальчиков дает по четыре распределения их для пяти мальчиков; условие, требующее, чтобы у каждого мальчика была надета чужая шапка, выполнено. Имеем, таким образом, уже

$$4 \cdot x_4 = 4 \cdot 9 = 36$$

способов распределения шапок для пяти мальчиков, согласно требованиям задачи.

То же рассуждение, примененное к n мальчикам с x_n возможными случаями распределения шапок, дает $n \cdot x_n$ распределений шапок для $(n+1)$ мальчика.

Но ни $4 \cdot x_4 = 36$, ни $n \cdot x_n$ не дают x_5 или x_{n+1} полностью.

В таблице всех возможных перестановок шапок четырех мальчиков (стр. 81—82) было $4 \cdot 2 = 4 \cdot x_3 = 8$ таких распределений шапок, в которых у одного мальчика была надета своя шапка, у всех остальных

мальчиков — чужие шапки. Если пятый мальчик обменяется шапкою с тем из первых четырех, у которого надета своя шапка, то после обмена у всех пяти мальчиков будут надеты чужие шапки. Так, из распределений шапок у четырех мальчиков, когда у первого мальчика надета своя шапка,

I	II	III	IV	мальчики,
1	3	4	2	} шапки,
1	4	2	3	

получаются распределения пяти шапок у пяти мальчиков:

I	II	III	IV	V	— мальчики,
5	3	4	2	1	} шапки,
5	4	2	3	1	

причем у каждого из пяти мальчиков надета чужая шапка. Таким образом, из восьми таких распределений четырех шапок, когда лишь у одного мальчика была надета своя шапка, получается при присоединении еще одного мальчика и соответственного обмена шапок

$$4 \cdot 2 = 4 \cdot x_3 = 8$$

новых распределений пяти шапок при условии, что у каждого из пяти мальчиков надета чужая шапка.

Рассуждая аналогично о n мальчиках, к которым присоединили $(n+1)$ -го мальчика, мы имели бы для n мальчиков $n \cdot x_{n-1}$ распределений n шапок так, что лишь у одного из $n+1$ мальчиков надета своя шапка. После обмена с $(n+1)$ -м мальчиком шапки получили $n \cdot x_{n-1}$ распределений шапок для $n+1$ мальчика, удовлетворяющих требованию о том, что у каждого из $n+1$ мальчика надета чужая шапка.

Из первоначальных распределений шапок для четырех мальчиков, когда у двух или у всех четырех была надета своя шапка, присоединением еще одного мальчика и обмена его шапки нельзя получить таких распределений шапок для пяти мальчиков, чтобы у каждого оказалась чужая шапка.

Таким образом, для пяти мальчиков имеем единственно возможные распределения шапок, удовлетворяющие требованиям задачи:

$$x_5 = 4 \cdot x_4 + 4 \cdot x_3 = 4(x_4 + x_3).$$

В общем случае для $n + 1$ мальчика имеем:

$$x_{n+1} = nx_n + nx_{n-1} = n(x_n + x_{n-1}).$$

Это равенство и есть общая рекуррентная формула, определяющая число искомых распределений для любого числа n шапок через соответственные числа для $n - 1$ и $n - 2$ шапок. Для любого числа n шапок мы получим ответ, зная ответ для двух предыдущих меньших чисел $n - 1$ и $n - 2$. А так как для $n = 2$ и $n = 3$ мы знаем x_2 и x_3 , то можем найти x_n для любого n .

Имеем общую рекуррентную формулу

$$\boxed{x_{n+1} = n(x_n + x_{n-1})}$$

применение которой дает:

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 2$$

$$x_4 = 3(x_3 + x_2) = 3(2 + 1) = 9$$

$$x_5 = 4(x_4 + x_3) = 4(9 + 2) = 44$$

$$x_6 = 5(x_5 + x_4) = 5(44 + 9) = 265$$

$$x_7 = 6(x_6 + x_5) = 6(265 + 44) = 1854$$

и так далее.

Если ввести равенство

$$x_1 = 0,$$

что естественно, так как один мальчик никаких обменов шапки сделать не может, то и x_3 получается по общей формуле:

$$x_3 = 2(x_2 + x_1) = 2(1 + 0) = 2.$$

Мы назвали способ решения нашей задачи рекуррентным, что означает сведение вопроса для данного числа к тому же вопросу для предыдущих меньших чисел. Для получения ответа для данного числа n мы должны вычислить соответственные ответы для всех предшествующих числу n натуральных чисел. Такой способ решения может показаться утомительным, но во многих задачах мы иного пути решения вопроса не имеем.

В X классе наша задача может быть решена при помощи специальных формул, которые там будут

выведены, но вычисление ответа для любого числа n будет по этим формулам еще более утомительным.

Второй вывод рекуррентной формулы¹

Рекуррентная формула, решающая нашу задачу, может быть получена другим рассуждением.

Все возможные случаи распределения шапок пятью мальчиками между собой так, чтобы у каждого была надета чужая шапка, x_5 , состоят из двух групп распределений:

A — распределения, при которых первый мальчик обменялся шапкою с кем-нибудь из остальных мальчиков (случаи, при которых происходит взаимный обмен шапками у первого мальчика);

B — распределения, при которых нет такого взаимного обмена шапками у первого мальчика.

Вычислим число случаев A и B .

Выпишем все возможные случаи, в которых первый мальчик обменялся шапкой с кем-нибудь из других.

I	II	III	IV	V	— мальчики;
2	1	4	5	3	случаи распределения шапок так, что первый мальчик произвел обмен шапки с одним из своих товарищей.
2	1	5	3	4	
3	4	1	5	2	
3	5	1	2	4	
4	5	2	1	3	
4	3	5	1	2	
5	3	4	2	1	
5	4	2	3	1	

Всего имеем $4 \cdot 2 = 4 \cdot x_3$ таких перестановок шапок. В случае $n + 1$ мальчика имели бы соответственно

$$n \cdot x_{n-1}$$

распределений шапок типа A , удовлетворяющих условию задачи.

Рассмотрим далее те случаи, в которых взаимного обмена шапками у первого мальчика с другим не

¹ Второй вывод рекуррентной формулы дается для тех читателей, которые не боятся некоторых трудностей. Он может при первом чтении книги быть пропущен.

происходит (случай типа B). Пусть, например, I мальчик надел шапку 2. Остаются

II	III	IV	V	мальчики,
1	3	4	5	шапки.

Сколькими способами эти четыре мальчика могут обменять свои шапки так, чтобы ни у кого из них не оказалась надетой своя шапка?

Если бы мы имели:

II	III	IV	V	мальчики,
2	3	4	5	шапки,

то вопрос заключался бы в решении нашей задачи для четырех мальчиков и число возможных случаев было бы x_4 .

Сколько будет случаев, удовлетворяющих условию задачи, если у нас остались

мальчики	II	III	IV	V,
шапки	1	3	4	5?

Число случаев, удовлетворяющих условию задачи, будет также x_4 , так как хотя у мальчика II, вместо своей шапки, осталась шапка 1, но эту шапку 1 он для получения распределений типа B надеть не может. Если он наденет шапку 1, то имеет место обмен шапками мальчиков I и II; соответствующее распределение шапок вошло уже в группу распределений типа A . Таким образом, число распределений типа B , соответствующих случаю, в котором I мальчик надел шапку 2, будет x_4 .

Так как мальчик I может надеть шапку каждого из остальных четырех мальчиков, то общее число распределений шапок типа B для пяти мальчиков будет

$$4x_4.$$

Ведя рассуждение относительно $n + 1$ мальчика, мы получим число распределений типа B

$$nx_n.$$

Так как все возможности распределения шапок, удовлетворяющие условию задачи, относятся либо к типу A , либо к типу B (взаимный обмен шапок

у первого мальчика с кем-нибудь из других имеет место или не имеет места), то имеем:

$$x_5 = 4x_4 + 4x_3 = 4(x_4 + x_3),$$
$$x_{n+1} = nx_n + nx_{n-1} = n(x_n + x_{n-1}).$$

Мы пришли к той же рекуррентной формуле, как и при первом способе рассуждения.

* * *

Автору книги не раз приходилось излагать решение этой задачи в школах, притом в классах от VII до X; в последнем — с добавлением к изложенным выше способам решения и решения с применением теории соединений. Обычно учащимися об изложенных двух способах вывода рекуррентной формулы задавался вопрос: какой способ вывода лучше?

Лучшим из двух изложенных способов вывода рекуррентной формулы является тот, который вами понят. Самым же лучшим будет тот вывод, который вы придумаете сами. Эта возможность отнюдь не исключена.

Профессор Василий Петрович *Ермаков* (1845—1922), весьма известный в высшей математике и много сделавший также для улучшения преподавания математики в школе, владел особым способом чтения математических книг. Он читал первую страницу новой книги, чтобы узнать, какую задачу себе ставит автор, затем последнюю страницу, чтобы узнать, к какому результату автор приходит, и, закрыв книгу, самостоятельно находил путь получения результата. Не раз способ решения, найденный таким образом Ермаковым, оказывался отличным от того, которым пользовался автор книги. Наука в этих случаях обогащалась новыми методами.



В.П. Ермаков

Желательно, чтобы школьник, читая рассказы о решении новых для него задач, поступал по способу профессора Ермакова, стараясь каждый раз самостоятельно найти решение задачи или, что еще лучше, дать свой оригинальный способ решения.

С таких попыток самостоятельного решения задач началась творческая работа почти всех крупных математиков. В „Журнале элементарной математики“, издававшемся профессором Ермаковым для учителей и учащихся школ, с самостоятельного решения простых вопросов начал свое творчество один из самых гениальных русских математиков — Георгий Фео-досьевич *Вороной*¹ (1868—1908); в том же журнале печатали свои первые юношеские попытки математического творчества известные впоследствии профес-сора-математики Д. А. Граве, И. И. Иванов, В. Ф. Каган, И. И. Чистяков и другие.

ИНДИЙСКАЯ ЗАДАЧА

Индийский математик четырнадцатого века На-раяна предложил такую задачу:

„Имеется корова, которая в начале каждого года приносит по телке. Каждая телка, начиная с четвер-того года своей жизни, в начале каждого года при-носила также по телке. О, ученый человек, скажи мне общее число коров в двадцатом году“.

Р е ш е н и е

Задачу эту можно решить теми сред-ствами алгебры, которые изучаются в X классе, однако ее можно решить также знакомым нам рекуррентным методом, и это решение, даже по необходимым для него выкладкам, проще, чем реше-ние при помощи алгебраических формул. Не надо смущаться не совсем реаль-ными условиями задачи — можно было бы заменить их более реальными, — для усвоения приема решения задач подобного типа это значения не имеет. Сохраняя задачу такой, какою ее оставил нам индийский мате-матик прошлого, мы оказываем некоторое уважение его памяти.



¹ Разложение многочленов на множители, основанное на свойстве корней квадратного уравнения. „Журнал элементарной математики“, 1886, стр. 11.



Нетрудно установить для решения этой задачи рекуррентную формулу, что, как мы знаем, и является основным звеном решения задач этим способом.

В первый год имелись: корова и телка, родившаяся в начале года, — значит, 2 особи. В начале второго года прибавилась еще телка; стало 3.

В начале третьего года прибавилась еще телка; стало всего 4.

В начале четвертого года к имеющимся 4 прибавились две, так как и первоначально имевшаяся корова и телка первого года дали по телке, всего стало

$$4 + 2 = 6 \text{ особей.}$$

В начале пятого года к 6 коровам прибавилось по телке от имевшихся в начале второго года особей, которых было 3; теперь стало

$$6 + 3 = 9 \text{ особей.}$$

Начиная с четвертого года, поголовье стада определяется по одной и той же рекуррентной формуле. Если обозначить поголовье четвертого года символом x_4 , а для любого (n -го) года символом x_n , то имеем:

$$\begin{aligned} x_4 &= x_3 + x_1, \\ x_5 &= x_4 + x_2, \\ x_n &= x_{n-1} + x_{n-3}. \end{aligned}$$

Формула очевидна, так как по условию задачи для получения числа коров (и телок) на любой год надо к числу голов предыдущего года прибавить телят, родившихся в начале этого года, а их будет столько, сколько было голов три года тому назад.

Итак, получим таблицу:

Год	Число коров и телят	
I	2	определяется непосредственным подсчетом
II	3	
III	4	
IV	6	по формуле:

V	9
VI	13
VII	19
VIII	28
IX	41
X	60
XI	88
XII	129
XIII	189
XIV	277
XV	406
XVI	595
XVII	872
XVIII	1278
XIX	1873
XX	2745

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-3}.$$

Итак, в двадцатом году поголовье стада составляло бы 2745 особей, если размножение их шло согласно условиям задачи.

РАССКАЗ ДЕВЯТЫЙ

о решении задач без каких бы то ни было вычислений

При решении рассмотренных задач не требовалось математических знаний, кроме четырех действий арифметики. В этом рассказе дается решение нескольких задач, не требующее даже арифметических действий.

ЗАДАЧА О ДЕСЯТИ КРЕПОСТЯХ



Какой-то царь, скажем, царь Горох, распорядился построить укрепленное место, состоящее из десяти крепостей, соединенных между собою защищенными от нападения траншеями. Траншеи должны были представлять пять прямых линий, на каждой по четыре крепости.

Инженеры представили план в виде пятиконечной звезды. Но царь остался недоволен планом по той причине, что все крепости оказались доступными атаке снаружи. Было желательно, чтобы одна или больше крепостей были защищены траншеями со всех сторон так, чтобы неприятель не мог подойти к ним.

Инженеры долго уверяли, что такое расположение крепостей невозможно, — царь же продолжал



настаивать на необходимости найти нужное ему решение.

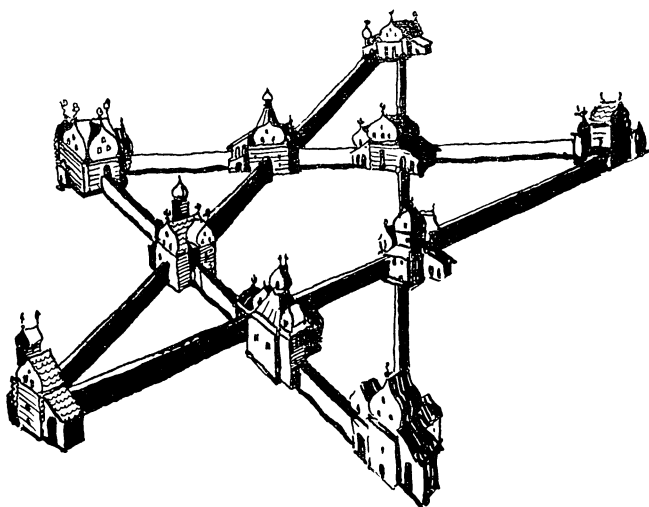
Наконец, удалось найти такое расположение, и не одно, а несколько, притом не равноценных в боевом отношении.

Постарайтесь найти самостоятельно решение вопроса.

Решение

Задачу можно решить по меньшей мере пятью способами.

На первых четырех планах в каждом одна крепость находится внутри защищенного траншеями участка, на пятом плане — две крепости имеют такое



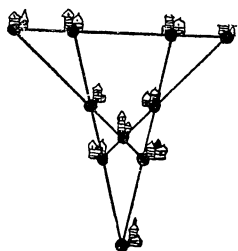
преимущественное положение. Очевидно, что пятый проект самый выгодный.

Не существует ли еще других возможных решений задачи?

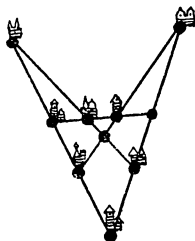
Эта задача принадлежит к так называемым задачам на расположение точек. Один английский любитель

головоломок, посвятивший им всю жизнь и издавший несколько книг на эту тему, утверждает, что для этого рода задач не существует никакого правила, решение нужно искать только пробами.

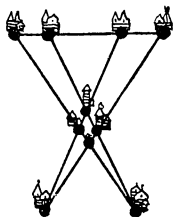
Он изучал и задачи, подобные нашей, и дал следующие названия полученным фигурам: первое решение (в начале нашего рассказа — в виде пятиконечной звезды) он называет звездой, а дальнейшие



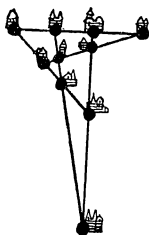
Воронка



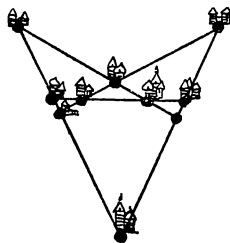
Стрела



Ножницы



Гвоздь



Циркуль

наши фигуры — воронкой, стрелой (наконечник), ножницами, гвоздем, циркулем.

Для решения задач на расположение точек он дает лишь такой совет:

„Испробуйте методы звезды, воронки, стрелы, ножниц, гвоздя и циркуля, и если они не помогут, то проявите свое остроумие или ждите остроумного человека со стороны“.

Не исключена возможность, что задача о десяти крепостях имеет решения, отличные от пяти, данных выше. Поэтому ищите, быть может и найдете. В случае успеха — сообщите автору книги.

ЗАДАЧА НЬЮТОНА

В двух старых (1821 и 1852 годов) английских сборниках занимательных задач мы встретили одну и ту же задачу на расположение точек. В обоих случаях задача изложена стихами, но разными. В первом сборнике они читаются так:

„Your aid I want, nine trees to plant
In rows just half a score;
And let there be in each row three,
Solve this: I ask no more“,

что значит:

„Мне нужна ваша помощь, чтобы посадить девять деревьев в десять рядов так, чтобы в каждом ряду было три. Скажи, — как, и я ничего больше у тебя не спрошу“.

Задача приписывается величайшему математику Исааку Ньютону (1642—1727).

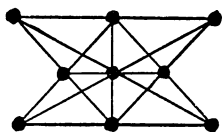
Сходство этой задачи с предыдущей очевидно.

По смыслу задачи как будто требуется $3 \cdot 10 = 30$ деревьев, — их же имеется только девять. Значит, некоторые, по крайней мере, деревья должны стоять на пересечении нескольких рядов. Назовем такие точки кратными. Можно подсчитать, сколько кратных точек и какой именно кратности требуются для выполнения условий задачи.

Этот подсчет облегчает поиски возможных решений.

Если бы все 9 точек были двукратными или трехкратными, то мы имели бы соответственно 18 или 27 точек, и решения задачи при этом не может получиться. Решение требует точек кратности четыре или выше; иными словами, некоторые деревья должны стоять на пересечении четырех или большего числа рядов. Так, например, 3 четверные и 6 тройных точек или 6 четверных и 3 двойные точки дают требуемое

число — 30 точек. Таким образом, можно предварительно подсчитать все возможные случаи сочетания кратных точек, удовлетворяющих условию задачи, и затем испытать возможность осуществления этих случаев на плоскости. Вот одно из решений задачи Ньютона.



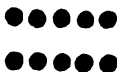
Здесь мы имеем 3 четверные и 6 тройных точек, то есть осуществлено первое указанное выше сочетание кратных точек, соответствующих 30 простым точкам.

Ищите другое решение задачи, не смущаясь тем, что она очень проста: ею, по преданию, занимался сам Ньютон.

ЗАДАЧА ЛЬЮИСА КЕРРОЛЛА

Самой интересной задачей на расположение точек на плоскости является задача Льюиса Керролла.

Десять монет (жетонов) расположены следующим образом:



Надо передвинуть только 4 монеты в такое положение, чтобы оказалось на пяти различных прямых по 4 монеты на каждой.

Задача допускает до 300 различных решений. Требуется найти по возможности большое число их и метод, по которому можно было бы разыскать эти решения, не рассматривая каждую комбинацию оставшихся на своих местах точек отдельно.

Появилась эта задача в разных формах, но ни у Керролла, ни в сборниках не ставился вопрос о нахождении всех, или по возможности всех, решений ее и общего метода нахождения этих решений.

Решение

1) Передвинуть можно лишь одну точку (монету) одного и 3 точки другого ряда. Беря по две точки

из каждого ряда, нельзя получить пяти рядов по 4 точки в каждом.

2) Будем передвигать 3 точки верхнего ряда и, следовательно, оставлять на своих местах 2 точки верхнего ряда. Каждому решению, полученному при этом предположении, соответствует такое же решение, при котором оставшиеся две неподвижные точки лежат на соответственных местах в нижнем ряду. Вследствие этого число необходимых построений уменьшается в два раза.

3) Две неподвижные точки в верхнем ряду можно получать столькими способами, сколькими можно из пяти предметов брать по два, не считаясь порядком элементов в этой паре. Легко проверить, что это можно сделать десятью способами, беря 1 и 2, 1 и 3, 1 и 4, 1 и 5, 2 и 3, 2 и 4, 2 и 5, 3 и 4, 3 и 5, 4 и 5. (В терминах курса X класса число способов равно числу сочетаний из 5 элементов по 2, то есть

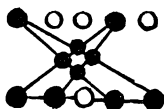
$$C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10.)$$

4) Из нижнего ряда можно удалить первую, вторую, третью, четвертую или пятую точку. Каждому из этих случаев соответствует 10 комбинаций оставшихся на месте двух точек верхнего ряда, следовательно, имеем 50 комбинаций.

5) Для любой из этих комбинаций существует по крайней мере одно решение задачи, которое получится, если соединить каждую из оставшихся в верхнем ряду двух точек с двумя точками нижнего ряда так, чтобы соединяющие прямые пересекались между собой, и поместить передвигаемые точки на пересечениях вспомогательных прямых. Чтобы эти пересечения получились, достаточно левую верхнюю точку соединить с двумя правыми точками нижнего ряда, а правую верхнюю точку с остальными двумя точками нижнего ряда. Тогда имеем 4 ряда по 4 точки, а, кроме того, в нижнем ряду остались 4 точки в одном ряду.

Если обозначить места передвинутых точек кружками, то решение представляется, например, следующей фигурой:

Такое построение возможно при любом из 50 расположений оставшихся неподвижными точек, и мы имеем 50 решений, оставляя 2 неподвижные точки в верхнем ряду, и столько же решений, оставляя 2 неподвижные точки в нижнем ряду, а всего 100 решений. Будем называть эти решения *внутренними*, так как передвигаемые точки остаются между первоначально данными рядами.

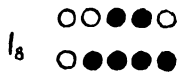
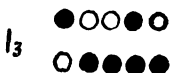
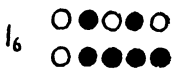
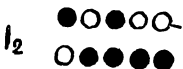
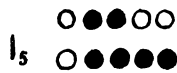
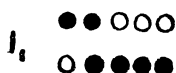


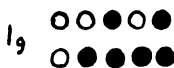
6) Естественно полагать, что внутренние решения не будут единственно возможными, а что, кроме них, существуют и решения, в которых передвигаемые точки займут частично положения вне первоначально данных двух рядов. Будем называть эти решения *смешанными*. Для нахождения их надо рассмотреть все 50 комбинаций двух точек в первом и четырех точек во втором ряду. Будем обозначать эти комбинации символами

$I_1, I_2 \dots I_{10}, II_1, II_2 \dots II_{10}, \dots V_1, V_2 \dots V_{10}$.

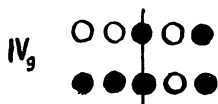
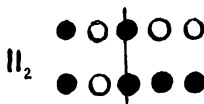
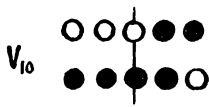
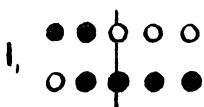
Латинская цифра показывает, которая точка нижнего ряда удаляется, а индийские цифры 1, 2 \dots 10 означают различные из возможных положений двух неподвижных точек верхнего ряда.

При таком способе обозначения символы $I_1, I_2 \dots V_{10}$ соответствуют всем возможным расположениям неподвижных точек. Примеры:





7) Полученные 50 расположений точек относительно вертикальной прямой, проведенной через третьи точки обоих рядов, попарно являются симметричными. Так, например, I_1 симметричен V_{10} , II_2 симметричен IV_9 и т. д. Решение, возможное для одного расположения точек, дает аналогичное решение и для соответственного парного ему расположения.



8) Парными являются расположения:

I_1 и V_{10} ; I_2 и V_9 ; I_3 и V_7 ; I_4 и V_4 ; I_5 и V_8 ;
 I_6 и V_6 ; I_7 и V_3 ; I_8 и V_5 ; I_9 и V_2 ; I_{10} и V_1 ;
 II_1 и IV_{10} ; II_2 и IV_9 ; II_3 и IV_7 ; II_4 и IV_4 ; II_5 и IV_8 ;
 II_6 и IV_6 ; II_7 и IV_3 ; II_8 и IV_5 ; II_9 и IV_2 ; II_{10} и IV_1 ;
 III_1 и III_{10} ; III_2 и III_9 ; III_3 и III_7 ; III_5 и III_8 ;
 III_4 и III_6

не имеют парных расположений.

Остается рассмотреть 25 случаев. Каждое решение для любого из этих расположений точек дает решение для соответственного парного расположения; перестановка верхнего и нижнего ряда еще удваивает число решений, так что каждое найденное для

25 случаев решение дает в окончательном итоге 4 решения.

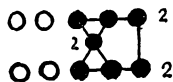
9) Мы даем все 25 основных случаев задачи Керролла. Для 23 случаев из них существуют парные расположения. Для случаев I_2 и I_3 даны и решения соответствующих парных с ними случаев V_9 и V_7 .

Для всех дальнейших случаев дается решение только для основного случая и расположение неподвижных точек парного с ним случая. Читатель должен самостоятельно начертить решение для парного с данным случаем.

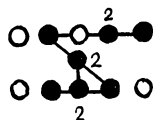
10) Для нескольких расположений точек не получается ни одного смешанного решения (внутренние решения существуют для всех расположений точек). Все эти случаи характеризуются тем, что при проведении прямых из верхних точек в какую-нибудь из четырех точек нижнего ряда получаются параллельные прямые; эти случаи не дают общих внешних точек для двух негоризонтальных рядов, так как получение этих точек пересечения и делает возможным решение задачи. Таким образом, получены 100 внутренних и 180 смешанных решений задачи Керролла. Нахождение их более экономным путем и поиски новых решений делают эту задачу интересной.

11) Задача может быть расширена, если вместо точек взять жетоны (монеты) и допустить возможность наложить одну монету на другую. Тогда возможны иные решения. Вот примеры таких решений:

Здесь точки с цифрой 2 означают 2 жетона, находящиеся один над другим. Последний чертеж дает решение, в котором имеется 5 рядов жетонов по 4 в каждом ряду.



12) Указание: для получения в каждой из комбинаций точек всех возможных решений проводим из первой точки верхнего ряда две прямые всеми возможными способами через две из нижних точек. Обозначая точки нижнего ряда по порядку



цифрами 1, 2, 3, 4, имеем следующие случаи для точек нижнего ряда, через которые проходят прямые: 1, 2; 1, 3; 1, 4; 2, 3; 2, 4; 3, 4. Последний случай дает внутреннее решение всегда, остальные пять могут дать внешнее. Если при этом не получается параллельных прямых, то решение возможно. Наибольшее число их для данной комбинации 5. Это наибольшее число решений имеют, как видно из перечня решений, только распределения I_4 и V_4 .



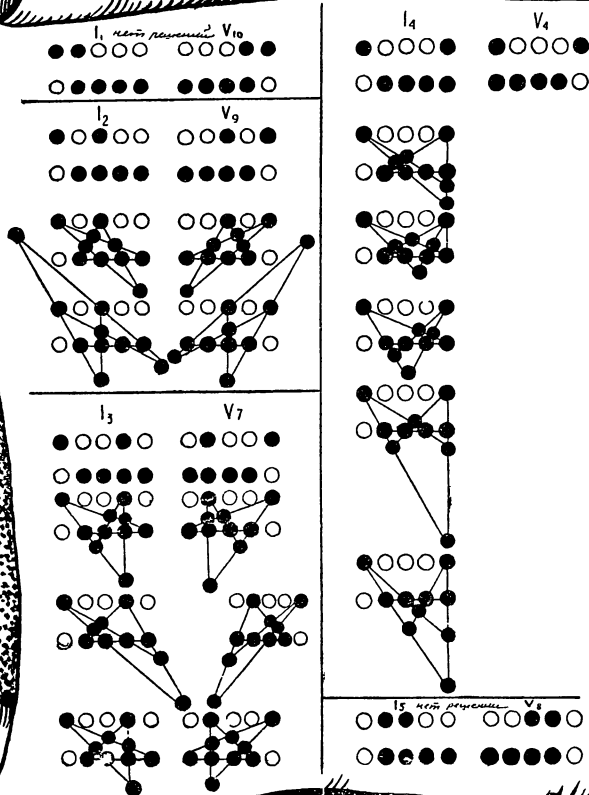
Л. Керролл

13) Автором этой задачи является профессор математики Оксфордского университета (Англия) *Чарльз Лютвидж Доджсон* (1832—1898), издавший под именем *Льюиса Керролла* ряд самых распространенных во всем мире детских книг. На русском языке из них неоднократно издавались „Алиса в стране чудес“ и „Алиса в Зазеркалье“.

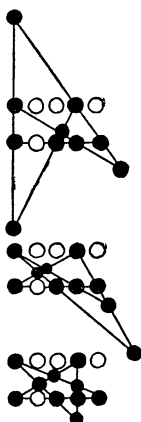
„Керролл создал новый вид сказок, используя современные научные идеи и иногда предвосхищая таковые, находя им выражение в забавном несоответствии и нелепом искажении обычных вещей... Вместе с тем он является подлинным поэтом, и его песни и стихи прекрасны даже тогда, когда они при буквальном понимании совершенно бессмысленны“... Так характеризует детские книги Керролла современный критик. Другой критик добавляет: „Ни один английский писатель не доставил столько радостного смеха своей нации“. Остроумие автора выразилось и в тех задачах, которые он составлял для учащихся.

Алисины книги были написаны автором для семилетней девочки Алисы Лиддель, которая в 1932 году была еще в живых и участвовала в торжествах, связанных со столетием со дня рождения Керролла. Рукопись книги „Алиса в стране чудес“ в юбилейные дни была продана за 300 000 рублей золотом. Это самая большая сумма, когда-либо уплаченная за книгу.

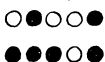
Решение задачи Керролла



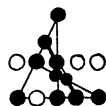
II₃



IV₇



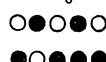
II₅



IV₈



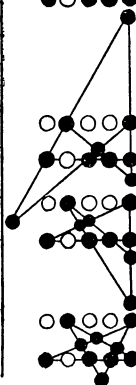
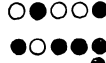
II₆



IV₆



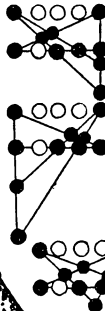
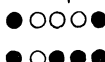
II₇



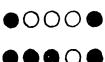
IV₃



II₄

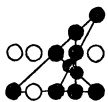
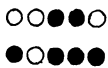


IV₄

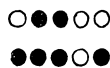




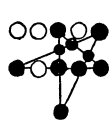
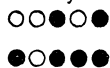
II₈



IV₅



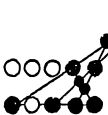
II₉



IV₂



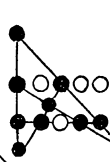
II₁₀



IV₁



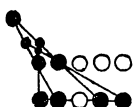
III₂



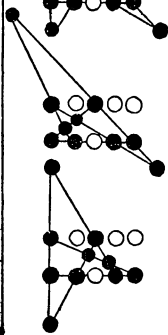
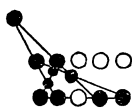
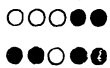
III₉



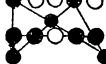
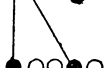
III₁



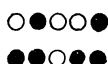
III₁₀



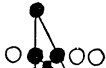
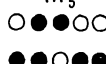
III₃



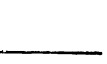
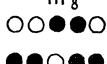
III₇



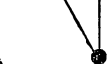
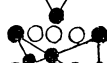
III₅



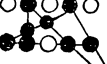
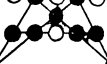
III₈



III₄



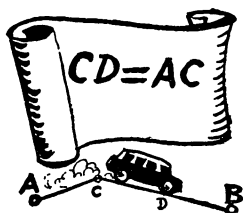
III₆



РАССКАЗ ДЕСЯТЫЙ, И ПОСЛЕДНИЙ,

о решении разных задач, не подходящих ни под один из рассмотренных выше видов их

ЗАДАЧИ ИЗ „АРИФМЕТИКИ“ МАГНИЦКОГО



До нас дошел целый ряд математических рукописей на русском языке XVI и XVII веков.

К концу XVII века этих рукописных пособий стало явно недостаточно и появилась потребность в руководствах математики.

В 1703 году была напечатана в Москве книга большого формата, в 612 страниц:

АРИФМЕТИКА

сиречь наука числительная. С разных диалектов на славенский язык преведеная и во едино собрана и на две книги разделена. Ныне же повелением благочестивейшего великого государя нашего царя и великого князя Петра Алексеевича всея великия и малыя и белыя России самодержца: при благороднейшем великом государе нашем царевиче и великом князе Алексие Петровиче, в богоспасаемом царствующем великом граде Москве типографским тиснением ради обучения мудролюбивых российских отроков и всякого чина и возраста людей на свет произведена, первое, в лето от сотворения мира 7211, от рождества же 1703, месяца Януария.

В рамке этого длинного заглавия, напечатанного в две краски и крупным шрифтом, почти незаметными мелкими буквами указано:

Сочинися сия книга чрез труды Леонтия
Магницкого

Книга эта была написана по заказу Петра I Леонтием Филипповичем *Магницким* (1669—1739), первым учителем математики в России. Многие десятилетия она служила руководством для изучавших математику в России и имеет очень большое значение в истории математического образования в нашей стране. „Арифметика“ Магницкого, вопреки своему заглавию, содержит, кроме арифметики, начала алгебры, геометрии и тригонометрии, а также применение математики к морскому делу. Она с успехом удовлетворяла потребность в математических знаниях наших предков в начале XVIII века.

В России до появления книги Магницкого были только рукописные математические книги. Лишь в 1682 году вышло в свет

„Считание удобное, которым всякий человек купующий или продающий зело удобно изыскати может число всякие вещи. А како число вещей и вещам число цены изыскивати, и о том читая в предисловии к читателю совершенно познаешь“.

Такое длинное заглавие носит таблица умножения всех чисел до 100×100 . Эта таблица нашла, по-видимому, широкое распространение, так как в 1714 году она была переиздана по повелению Петра I под заглавием:

„Книга считания удобного ко употреблению всякому хотящему без труда познати цену или меру какие вещи“.

Книга эта не является учебником.

В 1699 году в Амстердаме из русской типографии Яна Тессинга, которому Петр дал привилегию, „чтобы устроил типографию и печатал в ней... математические и архитектурные и городостроительные и всякие ратные и художественные книги“, вышла книга

„Краткое и полезное руководство во арифметику или в обучение и познание всякого счёту“.

Автором книги был белорус Илья Копиевский, или Копиевич, живший в Амстердаме.

Так как ни автор, ни издатель России не знали и не имели понятия о том, какие сведения по математике были известны русским читателям из рукописных математических книг, то книга эта оказалась столь элементарной и ненужной в России, что она почти не получила распространения и издатель потерпел материальный ущерб.

Проводником математических знаний в широкие русские массы суждено было стать учебнику Магницкого.

Автора „Считания удобного“ мы даже не знаем по имени, о Копиевском и Магницком сведения очень скудны. Портретов их тоже нет, так как фотографии в те времена не существовало, а заказывать портрет художнику эти скромные и простые люди были не в состоянии.

Приведем несколько задач из „Арифметики“ Магницкого.

Задача 1

„Некий человек продал коня за 156 рублей; раскаявшийся купец начал отдавать продавцу, говоря, что конь недостоин такой высокой цены. Продавец предложил ему иную куплю, говоря: если тебе кажется цена коню высока, то купи только гвозди, которые у коня в подковах, коня же возьми даром, а гвоздей в каждой подкове 6. За 1-й гвоздь дай мне полушку ($\frac{1}{4}$ копейки), за другой 2 полушки, за

3-й — копейку, а за 4-й — две копейки и т. д. за все гвозди. Купец, полагая, что все гвозди обойдутся не свыше 10 рублей, восхотел коня в дар получить и согласился на такую цену. Ведательно есть, коликим купец — он проторговался“.



Р е ш е н и е

Покупатель должен был уплатить согласно условию за коня:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{21} \text{ копеек.}$$

Сумма $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{21} = 2^{22} - 1$.

Для решения задачи и различных вопросов этого рода полезно иметь таблицу значений степеней двойки, которую мы даем здесь.

Показатель степени	Значение
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16384
15	32768
16	65536
17	131072
18	262144
19	524288
20	1048576
21	2097152
22	4194304
...	...
64	18 446 744 073 709 551 616

Из таблицы видим, что

$$2^{22} - 1 = 4\,194\,303;$$

за коня надо было бы уплатить $4\,194\,303 \frac{3}{4}$ копейки вместо первоначально спрошенной суммы в 156 руб-

лей. Ответ на вопрос задачи „коликим купец-он проторговался“, то есть, сколько покупатель потерял бы по сравнению со спрошенной ценой, будет

$$4\,194\,304\frac{3}{4} \text{ коп.} - 15\,600 \text{ коп.} = 4\,178\,703\frac{3}{4} \text{ коп.},$$

как правильно указывает Магницкий.

При помощи приведенной выше таблицы степеней двойки можно решить задачу о вознаграждении сказочного изобретателя шахматной игры, который просил положить на клетки шахматной доски 1, 2, 4, 8, 16 и так далее зерен. Очевидно, что общее число зерен будет

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{63} &= 2^{64} - 1 = \\ &= 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615. \end{aligned}$$

Подсчитано, что это количество зерен составляет урожай с поля, превосходящего величиной всю сушу земного шара в 28 раз.

Задача 2

Найти число, которое при делении на 2 даст в остатке 1, при делении на 3 даст в остатке 2, при делении на 4 даст в остатке 3, при делении на 5 даст в остатке 4.

Решение

Будем находить число, которое на единицу больше искомого. Это новое число разделится без остатка на 2, на 3, на 4 и на 5, то есть будет их общим кратным. Наименьшее общее кратное чисел 2, 3, 4, 5 есть 60, поэтому наименьшее искомое число 59.

Таких чисел можно найти сколько угодно по формуле

$$n = 60k - 1,$$

где k можно давать значение любого натурального числа.

Задача 3

„Вопросил некто некоего учителя, сколько имеешь учеников у себя, так как хочу отдать сына к тебе в училище. Учитель ответил: если ко мне придет учеников еще столько же, сколько имею, и пол

столько и четвертая часть и твой сын, тогда будет у меня учеников 100.

Сколько было у учителя учеников?"

Решение

Магницкий решает задачу так называемым фальшивым правилом.

Делаем первое предположение: учеников было 24.

Тогда по смыслу задачи к этому числу надо прибавить „столько, пол столько, четверть столько и 1“; имели бы:

$$24 + 24 + 12 + 6 + 1 = 67,$$

то есть на $100 - 67 = 33$ меньше, чем требовалось по условию задачи; число 33 называем „первым отклонением“.

Делаем *второе предположение*: учеников было 32.

Тогда имели бы:

$$32 + 32 + 16 + 8 + 1 = 89,$$

то есть на $100 - 89 = 11$ меньше; это „второе отклонение“.

На случай, если при обоих предположениях получилось меньше, дается правило: помножить первое предположение на второе отклонение, а второе предположение на первое отклонение, отнять от большего произведения меньшее и разность разделить на разность отклонений:

$$\frac{32 \cdot 33 - 24 \cdot 11}{33 - 11} = 36.$$

Учеников было 36.

Таким же правилом надо руководствоваться, если при обоих предположениях получилось *больше*, чем полагается по условию. Например:

Первое предположение: 52.

$$52 + 52 + 26 + 13 + 1 = 144.$$

Получили на $144 - 105 = 44$ больше — „первое отклонение“.

Второе предположение: 40.

$$40 + 40 + 20 + 10 + 1 = 111.$$

Получили на $111 - 100 = 11$ больше — „второе отклонение“.

$$\frac{40 \cdot 44 - 52 \cdot 11}{33 - 11} = 36.$$

Если при одном предположении получим *больше*, а при другом *меньше*, чем требуется по условию задачи, то нужно при указанных выше вычислениях брать не разности, а суммы. Например:

Первое предположение: 60.

$$60 + 60 + 30 + 15 + 1 = 166.$$

Получили на $166 - 100 = 66$ *больше* — „первое отклонение“.

Второе предположение: 20.

$$20 + 20 + 10 + 5 + 1 = 56.$$

Получили на $100 - 56 = 44$ *меньше* — „второе отклонение“.

$$\frac{60 \cdot 44 + 20 \cdot 66}{66 + 44} = 36.$$

Обоснование способа решения задач фальшивым правилом, которого Магницкий не дает, читатель может найти в книге „Рассказы о математике“ (Детиздат, 1954). Там же имеются некоторые дополнительные сведения о Магницком и его книге.

Задача 4

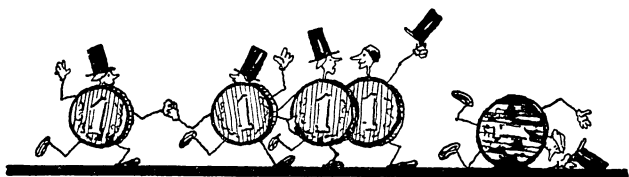
„Некий человек нанял работника на год, обещав ему дать 12 рублей и кафтан. Но тот по случаю, проработав 7 месяцев, восхотел уйти и просил достойную плату с кафтаном. Ему дали по достоинству 5 рублей и кафтан. Какой цены был оный кафтан?“

Решение

Работник должен был получить за год работы 12 рублей и кафтан, следовательно, в месяц 1 рубль и $\frac{1}{12}$ часть стоимости кафтана, за 7 месяцев 7 рублей и $\frac{7}{12}$ стоимости кафтана. Вместо этого он получил 5 рублей и кафтан ($\frac{12}{12}$ стоимости кафтана), то есть менее условленного на 2 рубля,



которые были заменены $\frac{12}{12} - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$ стоимости каф-
тана.



$\frac{5}{12}$ стоимости кафтана равны 2 рублям, весь каф-
тан стоит

$$2 : \frac{5}{12} = \frac{2 \cdot 12}{5} = 4 \frac{4}{5} \text{ рубля.}$$

Задача 5

„Один человек выпьет кадь питья в 14 дней,
а с женой выпьет ту же кадь в 10 дней. И ведательно
есть, в колико дней жена его особно выпьет ту же
кадь?“

Решение

Человек выпивает в день $\frac{1}{14}$ кади, вместе с же-
ной $\frac{1}{10}$ кади. Жена в день выпивает $\frac{1}{10} - \frac{1}{14} = \frac{1}{35}$ кади,
а всю кадь она выпивает в 35 дней.

2. ЗАДАЧА С. А. РАЧИНСКОГО

Вероятно, вы видели картину художника Н. П. Бог-
данова-Бельского (1868—1945) „Устный счет“.

На ней изображен урок устного решения задач
в школе села Татево, Смоленской области, в школе,
которую основал и в которой преподавал Сергей
Александрович *Рачинский* с семидесятых годов про-
шлого века. На картине воспроизведен С. А. Рачин-
ский. Художник Н. П. Богданов-Бельский был уче-
ником этой школы.



С. А. Рачинский

С. А. Рачинский (1833—1902) был замечательным представителем русских образованных людей прошлого столетия. Он был доктором естественных наук и профессором ботаники Московского университета, переводчиком сочинений Дарвина на русский язык и близким другом многих выдающихся людей своего времени (музыканта Листа, немецкого социалиста Лассаля, философа Куно Фишера и других). В 1868 году С. А. Рачинский оставляет должность профессора, от-

крывает школу для крестьянских детей и становится в ней учителем. Для этого он должен был перед чиновниками духовного ведомства выдержать экзамен на звание начального учителя.¹

Фигура каждого ученика на картине Богданова-Бельского показывает, как увлечен класс решением задач. Это является подтверждением рассказа С. А. Рачинского о том, как в его школе ученики любили уроки решения задач. „Не успел я приступить к упражнениям в умственном счете, которые до тех пор в школе не практиковались, как к ним развилась настоящая страсть... Меня стали преследовать то одна группа учеников, то другая, то все вместе с требованием умственных задач. К этому вскоре присоединилась страсть к письменным упражнениям в счете... Разом все, человек тридцать, накидывались на меня с дощечками:

- Сергей Александрович, деленьице!
- Мне на сотни!
- Мне на единицы!
- Мне на миллионы!
- Мне на тысячи!

И решения подавались с такой быстротой, что я едва успевал писать задачи. Проверить — никакой физической возможности.

¹ Во время преподавания математики в начальной школе С. А. Рачинским написаны книги: „1001 задача для умственного счета“, „Арифметические забавы“, „Геометрические забавы“, „Народная школа“ и другие.

Тут однажды, в минуту отчаяния, я бессознательно тиснул у себя в мозгу какую-то неведомую мне пружину, и все деления стали выходить без остатка.

Восторгу ребят не было границ:

— Мне, Сергей Александрович, задачу потруднее!

— А мне деленные, Сергей Александрович!¹

Обратите внимание на задачу, записанную на классной доске:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}.$$

Тут не случайно взятые числа и механическое вычисление результата, а в задаче имеется более глубокое содержание и красота, которые пытливого ученика могут привести на дальнейшие размышления.

Подсчет показывает, что $10^2 + 11^2 + 12^2 = 365$ и $13^2 + 14^2 = 365$. Иными словами, сумма квадратов трех последовательных натуральных чисел (10, 11, 12) равна сумме квадратов двух следующих за ними чисел (13, 14). Естественно, возникает вопрос, существуют ли еще другие такие тройки последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых равнялась бы сумме квадратов двух, следующих за ними, натуральных чисел?

Этот вопрос решим так.

Допустим, что существует такая тройка чисел, что

$$n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 = (n + 3)^2 + (n + 4)^2.$$

Это равенство после раскрытия скобок принимает вид

$$3n^2 + 6n + 5 = 2n^2 + 14n + 25$$

или

$$n^2 - 8n - 20 = 0.$$

Существует ли такое натуральное число n , которое удовлетворяет этому уравнению? Ответить на

¹ С. А. Рачинский. Сельская школа. Москва, 1892.



этот вопрос можно, не зная еще квадратных уравнений.

Разложим трехчлен $n^2 - 8n - 20$ на множители:

$$n^2 - 8n - 20 = n^2 - 10n + 2n - 20 = n(n - 10) + 2(n - 10) = (n - 10)(n + 2).$$

Трехчлен $n^2 - 8n - 20$, равный $(n - 10)(n + 2)$, обращается в 0 тогда и только тогда, когда $n = 10$ или $n = -2$. Корнями уравнения

$$n^2 - 8n - 20 = 0$$

являются только числа 10 и -2 .

Единственная тройка *натуральных* чисел, сумма квадратов которых равна сумме квадратов двух следующих за ними натуральных чисел, есть 10, 11 и 12.

Таким же образом можем решить вопрос: существует ли такая четверка последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых равна сумме квадратов трех следующих натуральных чисел? Иными словами, существует ли такое натуральное число n , которое удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + (n + 3)^2 &= \\ &= (n + 4)^2 + (n + 5)^2 + (n + 6)^2 \end{aligned}$$

или

$$n^2 - 18n - 63 = 0.$$

Трехчлен $n^2 - 18n - 63$ можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} n^2 - 18n - 63 &= n^2 - 21n + 3n - 63 = \\ &= n(n - 21) + 3(n - 21) = (n - 21)(n + 3). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что корнями уравнения

$$n^2 - 18n - 63 = 0$$

являются только числа 21 и -3 . Единственное натуральное число, удовлетворяющее поставленному вопросу, есть 21.

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2.$$

Примечание. Если поставить вопрос не о нахождении последовательных *натуральных*, а лишь *це-*

лых чисел (положительные, отрицательные, нуль), обладающих указанными в условии свойствами, то имеем еще решения, определяемые вторыми корнями уравнений:

$$\begin{aligned}(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 &= 1^2 + 2^2, \\ (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2.\end{aligned}$$

3. ЗАДАЧА НА ДВИЖЕНИЕ

Между городами A и B через возвышенность ходит автобус. При подъеме на возвышенность он идет со скоростью 25 км/час , при спуске — со скоростью 50 км/час . От A до B он идет $3\frac{1}{2}$ часа, от B до A — 4 часа.



Найти *арифметическим способом* расстояние между городами A и B , а также расстояние до высшей точки возвышенности.

Ученик решал задачу следующим образом.

Представим схему пути между городами A и B . Точка C обозначает точку перевала.

Очевидно, расстояние CB больше AC , так как на переезд из B в A требуется больше времени, чем на переезд из A в B .

Отложим от точки C расстояние CD , равное AC . Путь $AC + CD$ при переезде из A в B и путь $DC + CA$ при переезде из B в A требуют в обоих случаях одинаковое количество времени; разница времени $4 \text{ ч.} - 3\frac{1}{2} \text{ ч.} = \frac{1}{2} \text{ часа}$ получилась оттого, что при переезде из A в B путь DB был пройден со скоростью 50 км/час , при переезде из B в A — со скоростью 25 км/час . В первом случае для прохождения пути потребовалось времени $\frac{DB}{50}$ часа,

при обратном переезде $\frac{DB}{25}$ часа. $\frac{DB}{25} - \frac{DB}{50} = \frac{DB}{50}$ часа составляют разность потребных для прохождения расстояния DB в том и другом направлении промежутков времени. По условию задачи $\frac{DB}{50} = \frac{1}{2}$, $DB = 25$ км.

Ученик далее рассуждал так.

На переезд из D в A остается 3 часа, так как переезд от B до D потребует 1 часа времени.

Путь DC проходится со скоростью 25 км/час, равный ему путь CA — со скоростью 50 км/час.

Средняя скорость движения $\frac{50 + 25}{2}$ км = $= 37 \frac{1}{2}$ км/час.

За 3 часа автобус со средней скоростью $37 \frac{1}{2}$ км/час пройдет $112 \frac{1}{2}$ км. Расстояние между A и B $112 \frac{1}{2}$ км + 25 км = $137 \frac{1}{2}$ км.

Так как $AC = CD$, то $AC = 112 \frac{1}{2}$ км : 2 = $56 \frac{1}{4}$ км, $CB = 81 \frac{1}{4}$ км.

Проверка решения привела ученика в смущение.

Если $AC = 56 \frac{1}{4}$ км, то прохождение этого пути (из A в B) со скоростью 25 км/час требует больше 2 часов. Переезд из C в B со скоростью 50 км/час требует более $1 \frac{1}{2}$ часа, так как $CB = 81 \frac{1}{4}$ км. Вопреки условию, переезд из A в B требует более $3 \frac{1}{2}$ часа.

Ученик проверил решение при помощи уравнений. Обозначив AC через x , CB через y , имеем:

$$\frac{x}{25} + \frac{y}{50} = \frac{7}{2}$$

$$\frac{y}{25} + \frac{x}{50} = 4$$

или

$$2x + y = 175$$

$$2y + x = 200,$$

откуда

$$x = 50$$

$$y = 75.$$

Проверка по условию подтверждает правильность этого ответа.

В чем заключалась ошибка ученика при первом способе решения?

В неправильном толковании понятия „средняя скорость“.

Средняя скорость выражается числом, получаемым делением пути на время, *употребленное для прохождения этого пути.*

Автобус, поднимаясь в гору, проходит в час 25 км. В нашей задаче пути AC (в гору) и CD (с горы) были одинаковые, но скорость при спуске с горы (на пути CA) в два раза больше. За час подъема в гору было пройдено 25 км, при спуске с горы 25 км были пройдены в $\frac{1}{2}$ часа; автобус сделал 50 км в $1\frac{1}{2}$ часа; следовательно, его средняя скорость при этом была $50 : \frac{3}{2} = \frac{100}{3}$ км/час.

За 3 часа такого движения автобус прошел $\frac{100}{3} \cdot 3 = 100$ км, что и дает расстояние $DC + CA$.

Так как эти расстояния равны, то $AC = 50$ км, $CD + DB = 50$ км + 25 км = 75 км.

4. ЗАДАЧА О ДЕЛЕЖЕ ЯБЛОК

Мама поделила между тремя своими сыновьями все имеющиеся у нее яблоки. Первому она дала половину всех яблок и половину яблока; второму — половину остатка и половину яблока, третьему — половину нового остатка и половину яблока. Ни одного яблока при этом разрезать не приходилось. Сколько яблок получил каждый из сыновей?

Решение

Первоначальное число яблок и оба остатка при дележе яблок должны быть нечетными числами, иначе при прибавлении к каждой из половин этих чисел половины (яблока) не получились бы у всех сыновей целые числа яблок (по условию задачи разрезать яблок не приходилось).



Половина второго остатка и $\frac{1}{2}$ яблока (доля третьего сына) могли составить только одно яблоко; это и был второй остаток. Если бы второй остаток был 3, 5 или какое-нибудь другое нечетное число, отличное от 1, то половина этого остатка была бы $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ и т. д. яблок.

Одну половину да еще $\frac{1}{2}$ яблока получил бы третий сын и у матери осталось бы 1, 2 или более целых яблок, что противоречит условию задачи. Итак, второй остаток составляло одно яблоко. Половина его да еще $\frac{1}{2}$ яблока составляют 1 яблоко, которое и получил третий сын.

Если второй остаток был 1 яблоко, а он получился после отдачи второму сыну $\frac{1}{2}$ яблока из половины первого остатка, то первый остаток составлял 3 яблока и второй получил половину от 3 яблок $+$ $\frac{1}{2}$ яблока, то есть 2 яблока.

Если же первый остаток был 3 яблока, а он получился из половины первоначального количества яблок, из которой первому сыну к половине первоначального числа была добавлена $\frac{1}{2}$ яблока, то половина первоначального количества яблок была $3\frac{1}{2}$ яблока, а первоначальное число яблок 7. Итак, у матери было 7 яблок. Она дала первому сыну половину этого числа яблок и $\frac{1}{2}$ яблока, то есть $3\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4$ яблока, и у нее

осталось $7 - 4 = 3$ яблока (первый остаток). Второй сын получил половину этого остатка и $\frac{1}{2}$ яблока, то есть $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ яблока, и у матери осталось $3 - 2 = 1$ яблоко (второй остаток). Третий сын получил половину этого остатка и $\frac{1}{2}$ яблока, то есть $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ яблоко. Доли сыновей составляют $4 + 2 + 1 = 7$ яблок, то есть все яблоки, имеющиеся у матери. В согласии с условием задачи при дележе яблоки разрезать не понадобилось.

5. ЗАДАЧА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ЧИСЛА ПРИ ПЕРЕНОСЕ ЕГО ПОСЛЕДНЕЙ ЦИФРЫ НА ПЕРВОЕ МЕСТО

Последняя цифра некоторого числа 7. Эту цифру переставили на первое место слева, впереди остальных цифр, отчего получилось число, в 7 раз большее. Найти первоначальное число.

Решение

В числе, получающемся после перестановки цифры, первая цифра будет 7 и последняя 9, так как от умножения на 7 первоначального числа, оканчивающегося на 7, получится последняя цифра для нового числа 9, которая одновременно есть цифра десятков первоначального числа.

Итак, первоначальное число имеет последние две цифры 97. Новое число получается от умножения цифр первоначального числа по порядку, идя справа, на 7, причем умножение надо продолжать до тех пор, пока в произведении получается 7 единиц высшего разряда. Имеем: последние справа две цифры первоначального числа 97, последняя цифра нового числа 9. Умножаем на 7 цифры первоначального числа $7 \cdot 7 = 49$; 9 — вторая справа цифра первоначального числа, 4 запоминаем; $7 \cdot 9 = 63$; $63 + 4 = 67$; 7 — третья цифра, 6 запоминаем; $7 \cdot 7 = 49$; $49 + 6 = 55$; 5 — четвертая цифра, и так далее.

Каждая цифра первоначального числа, получаемая при таком умножении и стоящая на n -м справа месте

в этом числе, будет цифрою нового (полученного после перестановки последней цифры вперед) числа, стоящею на $n - 1$ -м справа месте его. Так, вторая цифра первоначального числа 9 будет первой справа цифрой нового числа, третья цифра первоначального числа 7 будет второй цифрой нового числа, четвертая цифра первоначального числа 5 — третьей цифрой нового числа и так далее. В результате получаем числа:

1 0 1 4 4 9 2 7 5 3 6 2 3 1 8 8 4 0 5 7 9 7 — первоначальное число; 7 1 0 1 4 4 9 2 7 5 3 6 2 3 1 8 8 4 0 5 7 9 — новое число.

Можно найти искомое число делением на 7 второго числа, зная, что у него первая цифра 7, последняя 9, что оно в 7 раз больше первоначального и что первая слева цифра частного (первоначального числа) есть вторая цифра слева для делимого. Деление надо продолжить до тех пор, пока оно закончится без остатка и с последней цифрой частного 7.

Поступаем следующим образом.

Новое число имеет первой слева цифру 7. Делим на 7, так как новое число в 7 раз больше первоначального; $7:7=1$, 1 будет первой слева цифрой первоначального числа и в то же время второй слева цифрой нового числа; при делении 1 на 7 имеем частное 0 и остаток 1; 0 будет второй цифрой первоначального и третьей цифрой нового числа; при втором делении имели остаток 1 единицу разряда, стоящего на втором слева месте нового числа; она составляет 10 единиц разряда, стоящего на третьем слева месте; делим 10 на 7, получаем в частном 1 и в остатке 3; 1 будет четвертой цифрой нового и третьей цифрой первоначального числа; остаток второго деления 3 (единицы разряда, стоящего на третьем месте слева) дает 30 единиц следующего разряда, в котором, кроме того, стоит цифра 1; делим 31 на 7; получаем в частном 4 и в остатке 3; 4 будет пятой цифрой нового и четвертой цифрой первоначального числа. Продолжаем деление до тех пор, пока оно не закончится без остатка и с последней цифрой частного 7. Имеем:

$$\begin{array}{cccc|c}
7101449275362318840579 & & & & 7 \\
10 & 19 & 16 & 28 & \hline
31 & 52 & 22 & 040 & 1014492753623188405797 \\
34 & 37 & 13 & 55 & \\
64 & 25 & 61 & 67 & \\
1 & 43 & 58 & 49 & \\
& 1 & 2 & &
\end{array}$$

Можно рассуждать и следующим образом.¹
Пусть первоначальное число

$$x = a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10 + 7.$$

Новое число

$$7x = 7 \cdot 10^{n-1} + a_n \cdot 10^{n-2} + a_{n-1} \cdot 10^{n-3} + \dots + a_2,$$

$$70x = 7 \cdot 10^n + a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10 = 7 \cdot 10^n + x - 7$$

$$69x = 7 \cdot 10^n - 7 = 7 \cdot (10^n - 1),$$

$$x = \frac{7}{69} \cdot (10^n - 1) = \text{целому числу},$$

следовательно,

$$\begin{aligned}
\frac{10^n - 1}{69} &= \frac{\overbrace{99 \dots 9}^{n \text{ раз}}}{69} = \frac{\overbrace{33 \dots 3}^{n \text{ раз}}}{23} = \\
&= 3 \cdot \frac{\overbrace{11 \dots 1}^{n \text{ раз}}}{23} = \text{целому числу}.
\end{aligned}$$

Остается делить число $111 \dots$ на 23, пока деление не совершится без остатка. Частное, умноженное на $7 \cdot 3$, и даст искомое число.

¹ Для учащихся старшего возраста.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы решили десятка три задач.

Многие из них при первом чтении казались такими, к которым обычные приемы решения как будто неприменимы. Однако мы их решили и убедились, что для этого не были нужны ни особенная теория, ни специальные правила. Достаточно было знать арифметические действия и при решении каждой задачи — несколько подумать.

М. Горький в 1934 году обратился к ребятам с вопросом: какие книги они хотели бы иметь?

Из нескольких тысяч ответов Горькому особенно понравился ответ тринадцатилетней девочки:

„Мы хотим книжек... не вроде описания, а в случаях“.

Девочка этим выразила пожелание, чтобы книга рассказывала не о вещах вообще, а о том, что действительно существует; чтобы книга показывала практически, как то или другое надо делать.

Мы в нашей книге не излагали дополнительных к школьному курсу сведений, которым нет конца, а стремились показать на примерах, „на случаях“, как вдумчивое использование самых начальных сведений по математике позволяет решать задачи, которые на первый взгляд кажутся весьма трудными.

Вспомним совет, который 15 лет назад на страницах детского журнала „Костер“ дал его читателям большой ученый, имя которого мы упоминали не раз в книге, академик Алексей Николаевич Крылов:

„Всему учись сам. Никогда не рассчитывай, что можно овладеть знаниями без работы. Старайся не просто запоминать изучаемое, а старайся понять сущность дела. То, что понято, легко запоминается и долго не забывается.

Накапливай опыт... Будь стоек, не бойся разочарований, не бросай начатого дела. Работай упорно и регулярно изо дня в день“.

Следуйте этому совету. Вы можете спросить, — для чего?

Вспомните ответ вашего друга Димки-Невидимки:

„Чтоб водить корабли,
Чтобы в небо взлететь,
Надо многое знать,
Надо много уметь.
И при этом, и при этом
Вы заметь-те-ка,
Очень важная наука
Арифме-ти-ка“.

Если вы, читая эту маленькую книгу, кое-что из нее записали себе на приход, то этим оправдано для автора писание и для вас чтение ее.



А. Н. Крылов

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ	3
РАССКАЗ ПЕРВЫЙ	
<i>о том, что происходило в одной из ленинградских школ на уроке в сентябре 1956 года при решении задачи . . .</i>	7
РАССКАЗ ВТОРОЙ	
<i>о том, что при решении задач нужно внимательно относиться к каждому слову условия</i>	21
РАССКАЗ ТРЕТИЙ	
<i>о том, как чертеж иногда помогает решить задачу . .</i>	28
РАССКАЗ ЧЕТВЕРТЫЙ	
<i>о том, как чертеж помогает при получении формул .</i>	39
РАССКАЗ ПЯТЫЙ	
<i>о решении некоторых вопросов о натуральных числах .</i>	45
РАССКАЗ ШЕСТОЙ	
<i>об уравнениях и решениях задач при помощи их</i>	58
РАССКАЗ СЕДЬМОЙ	
<i>о том, как задача, не имеющая отношения к геометрии, разъяснила способ решения геометрических задач на построение</i>	69
РАССКАЗ ВОСЬМОЙ	
<i>о том, что иногда ученик V класса лучше, чем ученик X класса, может решить задачу</i>	79
РАССКАЗ ДЕВЯТЫЙ	
<i>о решении задач без каких бы то ни было вычислений</i>	93
РАССКАЗ ДЕСЯТЫЙ, И ПОСЛЕДНИЙ,	
<i>о решении разных задач, не подходящих ни под один из рассмотренных выше видов их</i>	108
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	126

2 р. 55 к.

ДЕТГИЗ · ЛЕНИНГРАД · 1957